Formalismo hilbertiano *vs.*pensamento intuitivo[1]

Augusto J. Franco de Oliveira
(CFCUL)

David Hilbert (1862-1943)

Sumário

Nesta exposição procuramos contextualizar historicamente e explicar a génese do formalismo hilbertiano, e caracterizá-lo como um formalismo benigno compatível com o pensamento intuitivo, tanto no espírito e nas intenções explícitas como na metodologia desenvolvida pelo seu autor para realizar o seu famoso «programa de consistência».

Índice

1. Introdução e fontes[2]

O chamado "programa de consistência de Hilbert" e a corrente filosófica e fundacional associada — o *Formalismo* —, bases do ramo da Lógica Matemática conhecido por *Teoria da Demonstração (Beweistheorie)*, também conhecida por *Metamatemática*, foram concebidos gradualmente por David Hilbert ao longo das primeiras três décadas do séc. XX como resposta à grave «crise fundacional» originada pela descoberta dos paradoxos ou antinomias lógicas e semânticas na viragem do século. Em poucas palavras, o referido "programa de consistência" pretende justificar a matemática abstracta, infinitária (das totalidades infinitas) representada numa teoria formal, mediante uma prova finitista de consistência da teoria formal em causa. Na realidade, o "programa de consistência" é apenas uma parte, a mais facilmente compreensível, de um programa mais geral, o "programa de conservação", que consiste em mostrar que a matemática infinitária (a matemática abstracta do infinito, das demonstrações não construtivas,

---

[1]Título de conferência proferida no Seminário do Centro de Álgebra da Universidade de Lisboa, 27 de Fevereiro de 2004. Versão revista da publicada no *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática* **52** (2005), 1-25.

[2]Todas as citações foram traduzidas das versões em língua inglesa, conforme referências bibliográficas, excepto a definição da pág. 3.

dos objectos ideais — o grosso da matemática clássica, em suma), é uma *extensão conservativa* da matemática finitista (a matemática combinatorial, dos objectos e manipulações concretas), o que significa, *grosso modo*, que qualquer propriedade concreta dos objectos concretos que seja demonstrada abstracta ou infinitariamente também pode ser demonstrada finitisticamente.[3]

Por outro lado, a doutrina formalista na filosofia da matemática é geralmente entendida em duas vertentes: a *vertente ontológica*, oposta ao platonismo ou realismo, segundo a qual os objectos matemáticos abstractos (como os conjuntos infinitos) não têm existência real, e a *vertente epistemológica*, segundo a qual o conhecimento matemático e a sua justificação só podem ser explicados em termos de derivabilidade num sistema formal. O próprio Hilbert não tem posições extremas a este respeito, mas um aspecto importante do *formalismo hilbertiano*, é, sem dúvida, geralmente entendido como a doutrina de que a matemática é o desenvolvimento de sistemas de axiomas (que, uma vez formalizados como teorias em linguagens de primeira ordem tomam o nome de *sistemas* ou *teorias axiomáticas* formais).

Estes programas e concepções foram expostos numa série de conferências e artigos proferidas e publicadas entre 1904 e 1930, nomeadamente:

- ([14]) Sobre os fundamentos da lógica e da aritmética (Heidelberg, 1904[4]) — Apêndice VII de [12];
- ([15]) Pensamento Matemático (Zurique, 1917);
- ([16]) As novas fundamentações da matemática, Primeiro relatório (Hamburgo, 1922a);
- ([17]) Os fundamentos lógicos da matemática (Leipzig, 1922b);
- ([18]) Sobre o infinito (Münster, 1925) — Apêndice VIII de [12];
- ([19]) Os fundamentos da matemática (Hamburgo, 1927) — Apêndice IX de [12];
- ([20]) Problemas na fundamentação da matemática (Bolonha, 1928) — Apêndice X de [12];
- ([21]) Os fundamentos da teoria elementar dos números (1931).

Eis o que o próprio Hilbert diz, muitos anos mais tarde, em [12], Nota 102 da pág. 219, sobre aquele primeiro artigo de 1904 [14]:

«Ainda que a exposição que segue tenha sido ultrapassada no seu conteúdo por novas investigações minhas sobre os fundamentos da Matemática (v. Apêndices VIII–X de [12]), parece-me, no entanto, razoável reproduzi-la aqui, sobretudo porque nela apliquei pela primeira vez várias concepções e considerações motivadas pela exigência de não contradição, concepção independente dos conjuntos como entes, tendência para a atitude finitista e simultaneidade no emprego da lógica e da aritmética.»

Hilbert inicia neste trabalho, redigido pouco tempo após a divulgação do famoso *paradoxo de Russell* (o paradoxo do «conjunto de todos os conjuntos que não são membros de si próprios», descoberto por B. Russell em 1902 e comunicado em carta a Frege no mesmo ano), a busca da prova de consistência ou não contradição da aritmética. Fá-lo de uma maneira ainda bastante esquemática e rudimentar, mas contendo os germes de ideias e métodos que ele e outros desenvolverão posteriormente nas pesquisas de fundamentos. Todavia, só regressará ao tema dos fundamentos da matemática na conferência [15] na Sociedade de Matemática Suiça, em Zurique, a 11 de Setembro de 1917, publicada em 1918, e numa série de trabalhos publicados nos anos vinte (dos quais três, dos mais importantes, constituem os apêndices VIII–X de [12]), a saber [16]–[20].

---

[3] Mostra-se, em lógica matemática, que a propriedade de conservação implica a de consistência, mas só falamos desta última aqui.

[4] Referem-se aqui as datas das conferências, preferivelmente às datas da publicação.

Na literatura filosófica e técnica, as concepções filosóficas e os sucessos relativos e incompletos do programa de Hilbert e da filosofia formalista nos fundamentos têm sido vistas principalmente numa luz negativa, como inevitavelmente condenados a um fracasso inapelável (como pareceu a alguns, posteriormente, devido aos metateoremas de incompletude de Gödel, os quais, em boa verdade, apenas destruiram *parte* do programa de Hilbert, a parte que pretendia uma prova *finitista* de consistência de sistemas "fortes"), a qual tende a sublinhar uma visão teimosamente parcial da actividade matemática, em contraste com o platonismo, o logicismo e o intuicionismo rivais.

Mas as coisas não são bem assim, pelo menos, se atendermos atentamente às concepções e intenções de Hilbert *expressas* naqueles trabalhos das primeiras décadas do séc. XX. Na realidade, as concepções e os métodos de Hilbert têm um pouco de cada uma daquelas doutrinas rivais, mas também têm características originais que marcam claramente diferenças fundamentais. Como se constata em diversos trechos aqui transcritos, tudo gira à volta da concepção da natureza do *infinito matemático* e da sua justificação, e talvez uma das dificuldades em entender o pensamento de Hilbert resida no facto de ele parecer, por vezes, contraditório: em certas ocasiões diz defender os transfinitos cantorianos e o grosso da matemática clássica da época, informal e infinitária, e noutros passos diz que o infinito não existe. Mas tudo isto é conciliável no seu pensamento, como veremos.

Para melhor compreender as motivações e a metodologia de Hilbert temos de ter presentes alguns desenvolvimentos na matemática e na lógica durante o séc. XIX, os quais culminaram na viragem do século com a descoberta dos *paradoxos* ou antinomias que provocaram a famosa e de má fama crise fundacional que Hilbert enfrentou e tentou resolver (v. tabela final).

2. Antecedentes históricos

Na matemática do séc. XX, são especialmente relevantes para as questões de filosofia e fundamentos os desenvolvimentos seguintes:

• Na Geometria: Poncelet desenvolveu a geometria projectiva (propriedades das figuras invariantes para as projecções) e introduziu «pontos no infinito», o que permitiu unificar o tratamento das cónicas e aos quais Hilbert se há-de referir como ilustração do seu conceito de «objecto ideal»; Gauss, Bolyai e Lobatchevski desenvolveram independentemente as geometrias não euclidianas, levando a uma nova concepção do método axiomático — axiomáticas modernas ou *autónomas*, por oposição às axiomáticas clássicas ou *heterónomas* do tipo da de Euclides; Beltrami, Cayley, Klein e Riemann apresentaram modelos de geometrias não euclidianas, enquanto Riemann (variedades) e Klein (Programa *Erlangen*) deram novos significados ao termo "geometria". Pasch, Pieri e o próprio Hilbert, já no final do século, forneceram axiomatizações "completas" e categóricas (monomorfas) da geometria euclidiana e não euclidiana, no espírito moderno. As primeiras frases dos *Fundamentos da Geometria* [12] são:

«DEFINIÇÃO. Imaginemos três sistemas diferentes de objectos: aos objectos do *primeiro* sistema chamemos pontos e representemo-los por A, B, C, …; aos objectos do *segundo* sistema chamemos rectas e representemo-los por a, b, c, …; aos objectos do *terceiro* sistema chamemos planos e representemo-los por α, β, γ, … . Os pontos chamam-se também os *elementos da geometria linear*, os pontos e rectas os *elementos da geometria plana* e os pontos, rectas e planos os *elementos da geometria do espaço* ou *do espaço*.

Imaginemos os pontos, rectas e planos como tendo certas relações mútuas e indiquemos estas relações por palavras tais como «estar situado», «entre», «congruente»; a descrição precisa e, para fins matemáticos, completa destas relações, é dada por meio dos *axiomas da geometria*.»

• Na Álgebra: o início do séc. XIX assistiu aos trabalhos de Lagrange, Abel, Ruffini e Galois na teoria das equações e aos primeiros «teoremas de impossibilidade» (v. [26]), os quais também operaram uma nova concepção e transformação da álgebra das equações na álgebra estrutural (Hamilton, Cayley, Boole, Sylvester, Grassmann; os métodos algébricos penetraram na geometria (Klein), na lógica (Boole), na teoria dos números (Kummer, Germain, Dedekind), e na Análise, com os estudos de Abel sobre as funções elípticas e outras aplicações (Hamilton, Jacobi, Dirichlet, Riemann). Em geral, toda a matemática sofreu um processo de «algebrização».

● Na Análise, para além dos desenvolvimentos das séries de Fourier, das funções elípticas, das equações diferenciais e da análise complexa, e da introdução dos métodos analíticos na teoria dos números (Dirichlet, Riemann) há que referir como especialmente relevante para os fundamentos o processo de «rigorização» ou «aritmetização» iniciado com Cauchy e Bolzano e continuado com Dedekind, Dirichlet, Cantor e Weierstrass. O instrumento privilegiado deste processo foi a teoria (intuitiva) dos conjuntos de Dedekind ([5], *II)* e, principalmente, de Cantor. Todavia, aquela «aritmetização» significou a substituição da intuição geométrica, que tão bem servira a matemática e os matemáticos durante séculos, por uma outra, bem menos fiável: a intuição dos conjuntos abstractos.

● Na lógica e fundamentos, para além das tentativas incipientes de algebrização levadas a cabo por Boole, são especialmente relevantes as construções do contínuo real por Cantor e Dedekind (1872) e as axiomáticas para os números naturais de Dedekind (1888) e Peano (1889) No que respeita à lógica, assistimos ao nascimento da moderna lógica simbólica ou lógica matemática com os trabalhos de Peirce e, principalmente, de Frege. Os sucessos na axiomatização da aritmética e da geometria levam ao surgimento da ideia de «fundar» ou «fundamentar» toda a matemática num «grande sistema fundacional», compreendendo, desde o início, a lógica inferencial e a teoria dos conjuntos, projecto que é entusiasticamente abraçado por Frege e por Peano (já no séc. XX, por Russell, Zermelo, Bourbaki, ...).

As tendências dominantes foram, portanto, as de crescente abstracção, purificação (afastamento das ciências físicas), algebrização e axiomatização (caracterização "implícita" abstracta de objectos matemáticos, espaços e estruturas), acompanhadas de um certo empobrecimento das componentes de cálculo, ou melhor, de uma maior ênfase ou importância fundacional e operativa dos «infinitos actuais» e dos métodos existenciais. Todavia, algumas vozes, poucas, mas respeitáveis levantaram-se contra estas tendências, como Kronecker e Poincaré, mas por razões diferentes.

A natureza da matemática mudou irremediavelmente, percorrendo uma grande distância desde as caracterizações antigas como «ciência da quantidade» (Euler) ou «ciência dos factos gerais sobre as relações entre magnitudes» (Gauss). Já Boole, na tradição dos algebristas ingleses, redefine a matemática como um *cálculo simbólico*, «um método baseado no emprego de símbolos, cujas leis de combinação são conhecidas e gerais, e cujos resultados admitem interpretação consistente». Mas a definição de Cantor enfatiza, em alternativa à representação simbólica, a utilização de conceitos abstractos, independentemente da eventual adequação ou aplicabilidade às outras ciências:

«No processo do seu desenvolvimento, a matemática é inteiramente livre e é apenas condicionada no sentido auto-evidente de os seus conceitos serem mutuamente consistentes e estarem em relações exactas, organizadas por definições, com aqueles conceitos que foram introduzidos previamente e que já estão estabelecidos e disponíveis» (Cantor [4], em Ewald [6], vol. 2, p. 896)

Representação simbólica e cálculo, de um lado, *raciocínio conceptual sobre estruturas abstractas,* por outro, são as duas maneiras, não inteiramente incompatíveis, de encarar a natureza da matemática e da actividade dos matemáticos, as quais, em diferentes graduações, estão ambas presentes nos programas e metodologias de Hilbert nos estudos fundacionais. A preferência pela visão simbólica e computacional é particularmente forte em Kronecker, que se exprime do seguinte modo a esse respeito e tem influência na concepção da teoria da demonstração de Hilbert:

«(...) e todos os resultados da investigação matemática mais profunda devem, finalmente, ser expressos nas formas simples das propriedades dos inteiros. Mas para que estas formas pareçam simples é necessário, acima de tudo, possuir uma maneira adequada e reconhecível de expressão e representação dos próprios números. O espírito humano tem trabalhado neste projecto persistente e laboriosamente desde a pré-história...» (Kronecker [24], em Ewald [6], vol. 2, p. 955)

Em alguns aspectos, como a primordialidade dos números inteiros e a importância dos cálculos explícitos, Kronecker antecipa o intuicionismo/construtivismo de Brouwer (1908), personagem que entra em cena a meio da peça das preocupações de Hilbert mas é central ao reforço e encaminhamento dessas mesmas preocupações.

A divergência ou oposição entre os dois pontos de vista tem real importância para a matemática (para além do interesse filosófico ou especulativo) quando referidos à abordagem do *infinito* matemático. Para Kronecker, só é lícito lidar com noções infinitárias (ordinal transfinito cantoriano, número real) mediante a representação simbólica explícita e, mesmo assim, só são permitidas operações e relações de natureza algorítmica. Para os defensores dos infinitos cantorianos abstractos, os objectos matemáticos infinitos podem ser caracterizados abstractamente e considerados no seu valor nominal, apenas restringidos aos requisitos mínimos de «determinação» e «consistência». Cantor é especialmente sensível a este respeito e defende vigorosamente a liberdade criativa com restrições mínimas pagando, por isso, um elevado preço — o da tranquilidade e sanidade mentais) ao avançar que

«(...) a *essência* da *matemática* reside precisamente na sua *liberdade*» ([4], p. 896)

A clivagem ou oposição cálculo/abstracção referida tem relevância na concepção do que se entende ser o papel da lógica em finais do séc. XIX: para os calculistas, a lógica é considerada como uma disciplina que se ocupa da representação simbólica das noções lógicas e dos métodos de cálculo com elas, em particular, da representação do raciocínio inferencial, ideias que remontam a Leibniz e são abraçadas nos trabalhos de Frege, Peano, Russell e Whitehead. Do outro ponto de vista, o da abstracção, exige-se à lógica os meios formais de descrição dos objectos e estruturas matemáticas, em especial, pelo método axiomático ou postulacional, desenvolvido principalmente pelos americanos Veblen e Huntington mas que encontra raízes nos trabalhos de Dedekind sobre os fundamentos da aritmética (1888) e da análise (1872), muito embora o próprio Dedekind considerasse a sua caracterização (a menos de isomorfismo) dos números naturais como sendo essencialmente de natureza lógica.

Finalmente, é no final do séc. XIX que começa a emergir (mas não se clarifica totalmente) uma outra «clivagem» na concepção das matemáticas, a qual se torna mesmo indispensável à autonomização e desenvolvimento da moderna lógica matemática: a distinção entre as concepções sintáctico-dedutiva e semântico-estrutural do raciocínio matemático.

Chegamos, assim, ao fim do século XX onde se confrontam diversas concepções mais ou menos vagas e implícitas da matemática, da lógica e das relações entre uma e outra. Isto constitui o pano de fundo para as reflexões e projectos de clarificação e consolidação que Hilbert vai encetar a partir de 1900.

3. Hilbert, a lógica e os fundamentos

Em 1900, por alturas do Congresso Internacional de Matemáticos em Paris, Hilbert e Poincaré eram considerados os dois maiores matemáticos vivos. As razões para isso são conhecidas e não vão ser expostas aqui. Em todo o caso, é conveniente registar um importante diferendo com Kronecker e outros «construtivistas»: sendo Hilbert, desde cedo, adepto fiel dos novos métodos de Cantor na teoria dos conjuntos — recorde-se a célebre frase «Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós.» ([18], Apêndice VIII de [12], p. 243) —, e o autor de uma demonstração existencial, não construtiva, de um importante teorema da teoria dos invariantes, e tendo Kronecker, entre outros (nomeadamente, Brouwer, um pouco mais tarde) insistido em que os teoremas existenciais devem ser demonstrados construtivamente, estava preparado o terreno para a germinação da polémica, levemente sugerida em 1904, que haveria de explodir em 1922. Primeiro, em 1904:

«Embora na actualidade os matemáticos estejam de acordo, no essencial, quanto aos caminhos a percorrer e objectivos a atingir nas suas investigações sobre os fundamentos da geometria, não acontece o mesmo no que respeita ao problema dos fundamentos da aritmética; aqui a questão apresenta-se de outra maneira e os investigadores mantêm uma variedade de opiniões fortemente divergentes e conflituosas.

Com efeito: as dificuldades que aparecem ao fundamentar a aritmética são, em parte, em virtude da sua natureza, distintas daquelas que foram ultrapassadas ao estabelecer os fundamentos da geometria. No exame dos fundamentos desta ciência podiam deixar-se de lado certas dificuldades de carácter puramente aritmético; porém ao fundamentar a aritmética, não parece permitido o recurso a outra disciplina básica. Farei realçar, do modo mais claro possível, as dificuldades essenciais que aparecem nesse problema, submetendo os pontos de vista dos diversos investigadores a uma discussão breve e crítica.

Como é sabido, L. Kronecker viu no conceito de número inteiro o fundamento autêntico da aritmética. Ele propôs a concepção de que os inteiros — e, de facto, o número inteiro como um conceito geral (valor paramétrico) — são dados directa e imediatamente. Por isso não pôde reconhecer que o conceito de inteiro tem de ter uma fundamentação. Poderia chamá-lo de *dogmático*, na medida em que ele aceita os inteiros com as suas propriedades essenciais como um dogma e já não vê mais nada atrás.

H. Helmholtz representa o ponto de vista dos *empiristas*; porém, o ponto de vista experimental puro parece-me ser refutado ao observar-se que por meio da experiência nunca se pode deduzir a possibilidade ou a existência, possível ou actual, de um número arbitrariamente grande. Pois o número de entes, objectos da nossa experiência, por mais extenso que seja, está ainda situado abaixo de um limite finito.

Designaria por *oportunistas*, E. B. Christoffel e todos aqueles adversários de Kronecker que, guiados pelo sentimento correcto de que sem o conceito de número irracional toda a Análise ficava condenada à esterilidade, tratam de salvar a existência dos números irracionais com a invenção das propriedades «positivas» desse conceito ou por outros meios semelhantes. Porém, segundo a minha opinião, com os referidos métodos não se chegaria a uma refutação pertinente do ponto de vista de Kronecker.

Entre os sábios que penetraram mais profundamente na essência do número inteiro, menciono os seguintes:

G. Frege propôs-se o problema de fundamentar as leis da aritmética com os recursos da *lógica*, no sentido tradicional. Prestou o serviço de haver reconhecido correctamente as propriedades essenciais do conceito de número inteiro bem como o significado do raciocínio por indução matemática. Todavia, por coerência com o seu projecto, ao aceitar como princípio fundamental, entre outros, que um conceito (um conjunto) seja definido e aplicável imediatamente, somente quando para cada objecto está determinado se ele é ou não abrangido pelo conceito,[5] e aqui não impõe restrição alguma na noção «cada objecto», expõe-se a cair naqueles paradoxos da teoria dos conjuntos que radicam, por exemplo, na noção de conjunto de todos os conjuntos e que me parecem mostrar que as concepções e os meios de investigação da

[5]Isto é normalmente traduzido pela equivalência $A(a) \Leftrightarrow a \in \{x : A(x)\}$, onde $A(x)$ é uma condição em x (na linguagem da teoria dos conjuntos). Modernamente, $\{x : A(x)\}$ é a *classe* determinada (ou definida) pela condição $A(x)$, e só é conjunto se existir um conjunto B tal que $\forall x(A(x) \Rightarrow x \in B)$.

lógica tradicional não estão à altura das severas exigências da teoria dos conjuntos. *Ao invés, desde o princípio que deve ser considerado como objectivo primordial das investigações sobre a noção de número o evitar de tais contradições e o esclarecimento desses paradoxos.*

R. Dedekind reconheceu claramente as dificuldades matemáticas que são encontradas quando se busca uma fundamentação do conceito de número inteiro; e de forma sumamente sagaz dedicou-se, em primeiro lugar, à estruturação de uma teoria dos números inteiros. Em certos aspectos poder-se-ia designar a seu método como *transcendental*, visto que conduz a uma demonstração da existência do infinito por caminhos cuja orientação fundamental é utilizada de forma semelhante à filosófica,[6] caminhos que, certamente, eu não posso tomar como praticáveis e seguros, por causa das inevitáveis contradições que aparecem com o conceito da totalidade de todos os entes.

G. Cantor pressentiu as mencionadas contradições, e para dar expressão a esses sentimentos introduziu a distinção entre conjuntos «consistentes» e «inconsistentes». Porém, de acordo com a minha forma de pensar, ao não estabelecer um critério preciso para essa distinção, posso caracterizar a sua concepção sobre este ponto como deixando uma margem para juízos *subjectivos* que, por conseguinte, não oferece certitude objectiva.» ([14], Apêndice VII em [12], pp. 221–222)

E depois, passados quase vinte anos (Hermann Weyl, que fora o discípulo predilecto de Hilbert, «convertera-se» ao intuicionismo/ construtivismo de Brouwer):

«(...) O que Weyl e Brouwer fazem consiste em princípio em seguir o caminho desbravado por Kronecker: eles pretendem fundamentar a matemática deitando pela borda fora todos os fenómenos que os incomodam e estabelecendo uma ditadura de proibições *à* Kronecker. Mas isto significa desmembrar e mutilar a nossa ciência, e se nós seguíssemos tais reformadores, correríamos o risco de perder alguns dos nossos tesouros mais valiosos. Weyl e Brouwer caluniam o conceito geral de número irracional, de função, e até de função numérica, os números cantorianos [transfinitos] das classes mais altas, etc.; a proposição de que num conjunto infinito de inteiros positivos há sempre um elemento mínimo, e até o «*tertium non datur*» lógico (por exemplo, na asserção: ou existe um número finito de primos, ou há infinitos primos) — tudo isto são exemplos de proposições ou modos de inferência proibidos. Eu penso que, do mesmo modo que Kronecker foi incapaz, na sua época, de se livrar dos números irracionais (Weyl e Brouwer, todavia, admitem uma versão mutilada e incompleta), também Weyl e Brouwer serão incapazes de realizar o seu programa. Não: ao contrário do que Weyl acredita, Brouwer não representa a revolução, mas apenas uma repetição, com instrumentos antigos, de uma tentativa de golpe que, em tempos, foi tentado com maior ousadia mas, no

---

[6]Na realidade, a «prova» da existência de conjuntos infinitos fornecida por Dedekind é do foro psicológico. Reza assim:

«**64. Definição.** Um sistema S diz-se *infinito* quando é similar a uma sua parte própria; caso contrário S diz-se um sistema *finito*.

65. Teorema. Todo o sistema contendo um único elemento é finito.

(...)

66. Teorema. Existem sistemas infinitos.

Prova. O domínio dos meus pensamentos, i. e., a totalidade S das coisas que podem ser objectos do meu pensamento, é infinita. Pois se s denota um elemento de S, então o pensamento s' de que s pode ser objecto do meu pensamento também é elemento de S. Se considerarmos este elemento como uma imagem $\phi(s)$ do elemento s, então a aplicação ϕ de S [em S] assim determinada tem a propriedade de que o sistema imagem S' é parte de S; e S' é certamente uma parte própria de S, pois há elementos de S (e. g. o meu ego) que são diferentes de todo o pensamento s' e, portanto, não estão em S'. Finalmente, é claro que se a, b são elementos diferentes de S, então as suas imagens são também diferentes, e por conseguinte a aplicação ϕ é um similaridade. Portanto, S é infinito, como se queria demonstrar.» (Dedekind [5], *II* em Ewald [6] pp. 806–807.)

entanto, falhou redondamente; e agora que o poder do estado foi rearmado e fortalecido por Frege, Dedekind e Cantor, este golpe está condenado ao fracasso.

(...) O objectivo de encontrar uma fundação segura para a matemática é também o meu. Eu gostaria de reaver para a matemática a velha reputação de verdade incontestável, que parece ter perdido em consequência dos paradoxos da teoria dos conjuntos; mas creio que isso pode ser realizado sem perder, entretanto, nenhuma das grandes realizações. O método que advogo não é outro senão o axiomático.» ([16], em [5], p. 1119)[7]

Outra citação, onde Hilbert critica, mais uma vez, com veemência, uma opção lógica fundamental do intuicionismo de Brouwer:

«A ideia fundamental na minha teoria da demonstração não é outra senão a de descrever a actividade de compreensão da nossa inteligência, de estabelecer um protocolo de regras segundo as quais o nosso pensamento actua realmente. O pensamento processa-se como o falar e o escrever: construimos asserções umas após outras. Se alguma totalidade de observações e fenómenos merece ser constituída em objecto de investigação séria e exaustiva é esta, pois, afinal de contas, é parte da tarefa da ciência libertar-nos da arbitrariedade, do sentimento, dos hábitos e preconceitos, e proteger-nos do subjectivismo que já se observa nos pontos de vista de Kronecker e me parece ter culminado no intuicionismo.

O desafio mais agudo e apaixonado lançado pelo intuicionismo é aquele que contesta a validade do «*tertium non datur*», por exemplo, no caso mais simples, a validade do raciocínio segundo o qual toda a asserção contendo uma variável numérica ou é válida para todos os valores numéricos da variável ou existe um número para o qual é falsa. O «*tertium non datur*» é uma consequência do axioma lógico, ε,[8] e jamais originou o mais pequeno erro. Além disso, é tão claro e compreensível que exclui aplicações abusivas. Em particular, o «*tertium non datur*» não deve ser minimamente culpado pelos conhecidos paradoxos da teoria dos conjuntos;[9] outrossim, estes paradoxos foram devidos à introdução de noções inadmissíveis e sem sentido, que na minha teoria da demonstração ficam automaticamente excluídas. As demonstrações de existência com auxílio do «*tertium non datur*» são em geral especialmente atractivas pela sua brevidade e elegância surpreendentes. Tirar ao matemático o «*tertium non datur*» seria o mesmo que querer proibir ao astrónomo o uso do telescópio, ou ao boxeur o emprego dos punhos. A não aceitação do uso do «*tertium non datur*» nos teoremas de existência é, em síntese, quase que uma renúncia da ciência matemática.» ([19], Apêndice IX em [12], p. 270)

Hilbert está a criticar mas não a distorcer o que, no seu entender, são alguns aspectos limitativos do intuicionismo/construtivismo matemático de Brouwer, relativamente a conceitos e proposições da matemática «clássica», cantoriana, de que Hilbert não quer abdicar. Além disso, convém não perder de vista que os trabalhos de Kronecker foram de grande importância para alguns dos trabalhos de Hilbert, nomeadamente, na teoria algébrica dos números, e que, mesmo que não o reconheça explicitamente, a herança deixada por Kronecker estará presente num aspecto metodológico fundamental da Teoria da Demonstração de Hilbert: o raciocínio finitista ou intuicionista estrito é necessário, a nível metamatemático, para garantir a segurança da matemática não intuicionista.

Antes de 1899 (ano de publicação da primeira edição dos *Fundamentos da Geometria*, [12]), alguns aspectos da actividade científica de Hilbert exibiam preocupações de natureza fundacional, como, por exemplo, o seu trabalho nas fundações da teoria algébrica dos números.

---

[7]Todavia, anos mais tarde Weyl abandona o intuicionismo brouweriano por considerar que este não lida satisfatoriamente com as relacionadas com a matemática aplicada.

[8]Trata-se do axioma-esquema $A(a) \rightarrow A(\varepsilon_x A(x))$, que desempenha, no formalismo de Hilbert, o papel de axioma da escolha. ε é o *símbolo de escolha* de Hilbert, adoptado por Bourbaki mas rebaptizado τ.

[9]De facto, foi demonstrado por K. Gödel em 1939 que o axioma da escolha é consistente relativamente aos restantes axiomas da teoria axiomática dos conjuntos.

Pouco depois, outro artigo igualmente crucial para os fundamentos, desta vez da análise real, onde é apresentada a primeira axiomática para os números reais, começa assim:

«Quando observamos e comparamos entre si os numerosos trabalhos sobre os princípios da *aritmética* e sobre os axiomas da *geometria*, percebemos, não obstante as múltiplas analogias e afinidades destes dois assuntos, uma nítida diferença no que respeita ao *método* de investigação.

Recordemos, em primeiro lugar, o modo e a forma de introduzir o conceito de número. Partindo da unidade, imaginamos criados, como se faz ordinariamente, os demais números naturais 2, 3, 4, … mediante o processo de contagem, e desenvolvemos as suas leis de cálculo; depois, por necessidades de generalização na prática da subtracção, chega-se aos números negativos; em seguida define-se o número fraccionário, digamos como um par de números —, com os quais toda a função linear possui um zero; e finalmente, define-se o número real como um corte ou uma sucessão fundamental, chegando-se a que toda a função inteira racional (e até toda a função contínua) que muda de sinal possui um zero. A este processo de introdução do conceito de número podemos denominar de *método genético*, porque o conceito mais geral de número real é engendrado por sucessivas extensões do conceito simples de número.

De forma essencialmente distinta se procede na estruturação da geometria. Nesta disciplina procura-se começar com hipóteses de existência de todos os elementos, isto é, postula-se à partida três sistemas de entes (nomeadamente, os pontos, as rectas e os planos), e estabelecem-se relações entre esses elementos — essencialmente segundo o padrão de Euclides — por meio de certos axiomas que são os de incidência, ordem, congruência e continuidade. Põe-se então o problema necessário de demonstrar a *consistência* [ou *não-contradição*] e a *completude* destes axiomas, isto é, deve-se provar que a aplicação dos axiomas estabelecidos não pode conduzir a contradição e, ainda, que tais axiomas são suficientes para a demonstração de todos os teoremas geométricos. Chamaremos *método axiomático* a este procedimento de investigação.

Coloquemos a questão de se, na realidade, o método genético é precisamente o único apropriado para o estudo do conceito de número, e o método axiomático para os fundamentos da geometria; também tem interesse comparar ambos os métodos e investigar qual deles apresenta mais vantagens para a investigação lógica dos fundamentos da mecânica ou de outra ciência física qualquer.

A minha opinião é a seguinte: *apesar do alto valor heurístico e pedagógico do método genético, merece, no entanto a minha preferência o método axiomático para a representação definitiva do nosso conhecimento e a sua plena fundamentação lógica.*» ([13], Apêndice VI em [12], p. 216).

Não é de admirar, portanto, que na Conferência Internacional de Matemáticos em Paris, que teve lugar em Agosto de 1900, dos 23 problemas em aberto anunciados por Hilbert (apenas 10 foram anunciados oralmente na conferência), quatro sejam de natureza lógica ou fundacional:

— o *problema do contínuo* de Cantor (sobre a potência ou cardinalidade do contínuo, $2^{\aleph_0}$, se é ou não a primeira a seguir à potência do numerável, $\aleph_0$);

— o *problema da consistência ou não contradição da aritmética* dos números reais (isto é, da Análise);

— o *problema do tratamento matemático dos axiomas da Física*; e

— o *problema da decisão sobre a existência de soluções inteiras para as equações diofantinas*.

Nos trabalhos fundacionais em que é aplicado o método axiomático, *Fundamentos da Geometria* [12] e “Sobre o conceito de número” [13], ainda não é claro, todavia, para que lado Hilbert se inclina mais na concepção do método que tem claramente a sua preferência, se a sintáctico-dedutiva se a semântico-estrutural. Se, por um lado, num e noutro, os axiomas são claramente formulados, mas nenhuma referência explícita é feita à linguagem ou à lógica subjacentes, por outro refere-se em alguns passos a aspectos dedutivos, como, na parte sublinhada da citação acima, referindo-se à geometria, a exigência de que «tais axiomas são suficientes para a demonstração de todos os teoremas geométricos». Mas a concepção semântico-estrutural ainda parece prevalecer, por exemplo, nas partes mais avançadas dos *Fundamentos* em que se discutem diversos modelos de sistemas e subsistemas de axiomas para a geometria (euclidiana e não euclidianas) e, no artigo com a axiomática dos reais [13], a intenção é claramente a de obter uma *caracterização categórica* (isto é, que possua um modelo único a menos de isomorfismo) dos números reais.

Mas na conferência de Heidelberga em 1904 [14] há já um anúncio de que se deve procurar preferivelmente uma *prova sintáctica de consistência* para a aritmética. Entre esta conferência e a conferência "Pensamento Axiomático" em Zurique, em 1917 [15], várias coisas importantes acontecem na matemática, na lógica e nos fundamentos:

— Zermelo introduzira o Axioma da Escolha em 1904 para demonstrar o Teorema da Boa Ordenação, reincide em 1906 e em 1908 apresenta a sua axiomática para a teoria dos conjuntos de Dedekind e Cantor, segundo a doutrina da «limitação da grandeza», com vista a bloquear alguns dos paradoxos conhecidos;

— Russell publica a primeira edição de *The Principles of Mathematics* em 1903, e em colaboração com Whitehead publica três volumes (dos quatro projectados) dos *Principia Mathematica* em 1910. 1912 e 1913, respectivamente, nos quais implementa o programa logicista (oriundo em Frege) de reconstrução da matemática em termos lógicos;

— Poincaré publicou as suas críticas de Hilbert [14] e dos logicistas em 1905 e 1906;

— Brouwer começou a desenvolver o seu intuicionismo/construtivismo matemático em 1908;

— Weyl publica o *Das Kontinuum* [30] em 1917, onde é visível a sua afinidade com o construtivismo de Brouwer, desertando Hilbert.

O artigo de Hilbert de 1918, "Pensamento Axiomático", explora os aspectos fundacionais do método axiomático, os quais já distingue claramente dos aspectos puramente matemáticos; mas mais importante do que isto é a distinção que se adivinha na sua mente entre a *justificação de uma teoria matemática usando métodos semânticos* (por exemplo, ao construir um modelo da geometria hiperbólica dentro de um modelo da geometria euclidiana) e a *justificação dos próprios métodos matemáticos:*

«O problema da consistência do sistema de axiomas para os *números reais* pode ser igualmente reduzido, mediante a utilização de conceitos conjuntistas, ao mesmo problema mas para os inteiros: é este o mérito das teorias dos números irracionais desenvolvidas por Weierstrass e Dedekind.

Somente em dois casos é que este método de redução de um domínio do conhecimento a outro claramente não está disponível, nomeadamente, quando se trata dos axiomas para os próprios *inteiros*, e quando se trata dos fundamentos da *teoria dos conjuntos*; pois, nestes casos, não há nenhuma outra disciplina além da lógica que seria possível invocar.» (Hilbert [15], em Ewald [6], p. 1113)

Uns parágrafos mais adiante, após dar diversos exemplos matemáticos em que desempenha um papel importante a questão da *decidibilidade* de uma questão matemática num número finito de passos (como a questão do número máximo de componentes separadas que é necessário para formar uma superfície do quarto grau), escreve (itálicos meus):

«Estas discussões particulares mostram como uma variedade de métodos de demonstração se pode aplicar ao mesmo problema, e devem sugerir como deve ser fundamental o estudo da essência da demonstração matemática, se quisermos responder a questões tais como a decidibilidade num número finito de operações.

Todas aquelas questões de princípio, que caracterizei acima, incluindo a última — isto é, a questão sobre a decidibilidade num número finito de operações — parecem-me constituir um novo e importante campo de investigação que está por explorar. Estou persuadido de que, a fim de conquistar este campo, é necessário *tornar o próprio conceito de demonstração matemática* *num objecto de investigação*, do mesmo modo que o astrónomo considera o movimento da sua própria posição, e o físico estuda a teoria dos seus instrumentos, e o filósofo critica a própria razão.

Bem entendido, a execução deste programa é uma tarefa ainda não realizada.

Em conclusão, gostaria de resumir em poucas frases a minha concepção geral sobre a essência do método axiomático. Acredito que tudo o que possa ser objecto de pensamento científico torna-se dependente do método axiomático, e assim, indirectamente da matemática, mal esteja maduro para a teorização. Ao buscar camadas de axiomas cada vez mais profundas, no sentido explicado acima, também adquirimos intuições cada vez mais profundas sobre a essência do próprio pensamento científico, e tornamo-nos cada vez mais conscientes da unidade do nosso conhecimento. Sob a bandeira do método axiomático, a matemática é chamada a assumir um papel dianteiro na ciência» (Hilbert [15], em Ewald [6], p. 1115)

Aqui está presente um elemento importante para a compreensão da teoria da demonstração hilbertiana, mas é principalmente por causa da preocupação de Hilbert com a «*justificação dos métodos matemáticos*» que, quando retoma em força os trabalhos de fundamentos nos anos 20, a balança irá cair decididamente para o lado sintáctico — o método, por excelência, da teoria da demonstração.

Por estas alturas já é claro para Hilbert que os sistemas dedutivos podem ser estudados em si mesmos, independentemente de qualquer interpretação semântica. Em se tratando de sistemas para a lógica, é claro que eles, além de consistentes, devem ser suficientes para captar todas as formas de raciocínio matemático. Formulado de outra maneira, este é o *problema da completude semântica*, que, segundo os estudiosos, terá sido resolvido para a lógica proposicional e leccionado no primeiro semestre de 1917–18, e é claramente formulado como problema em aberto para a lógica de 1.ª ordem na monografia baseada nas notas daquele curso, todavia só publicada em 1928 [22]. Como é sabido, Gödel resolve completamente esta questão na sua tese de doutoramento em 1929.

4. Formalismo e programa de consistência

O termo "formalismo" tem um significado e conotação que é anterior às concepções filosóficas e os trabalhos de Hilbert na lógica e nos fundamentos, derivando simplesmente do facto de uma dada teoria matemática poder (e dever) ser, primeiro, objecto de uma formalização estrita, a qual envolve a abstracção total do significado, sendo o resultado chamado um *sistema formal* ou *formalismo*, ou, por vezes, *teoria formal*. No formalismo extremo que por vezes se atribui (com boa razão) a Frege e Russell, não há mais do que isso na matemática.[10] Estabelecido o sistema formal, o mesmo pode agora ser visto de fora e ser objecto de estudo matemático, estudo este que é chamado de *metamatemática* ou *teoria da demonstração*. O génio de Hilbert foi ter feito a "*síntese*" destas duas coisas: de um lado, uma axiomatização da (ou de grande parte da) matemática num «grande sistema fundacional, compreendendo a lógica inferencial, na tradição de Frege, Russell e Whitehead e Zermelo; do outro lado, estudar a própria lógica ou os próprios sistemas formais como se fossem um ramo da álgebra, na tradição de Boole e de Peirce. Além disso, é crucial para Hilbert distinguir judiciosamente a matemática formalizada num dado sistema formal, da matemática utilizada para fazer a metamatemática do sistema. Esta distinção é crucial, em particular, se se pretende *demonstrar matematicamente* a consistência do "grande sistema" fundacional, como é forçoso que seja feito, para evitar surpresas futuras como as que inundaram e abalaram as fundações da teoria ingénua dos conjuntos de Cantor. Para que uma tal prova de consistência não possa jamais ser contestada, há que *restringir voluntariamente os meios conceptuais, matemáticos e técnicos à nossa*

[10] As posições de Frege e Russell são geralmente conotadas com o *logicismo*, que não é mais que um formalismo reducionista, em que a matemática se reduz e emana da lógica.

disposição. Este é um aspecto essencial do "programa de consistência" — a restrição aos métodos *finitistas*.

É nesta segunda vertente que entra o "pensamento intuitivo" referido no título desta exposição. Veremos como mais adiante.

O formalismo extremo contende que a matemática abstracta, infinitária, é um mero jogo simbólico e formal desprovido de significado, e que a tarefa de escolher um dado jogo preferivelmente a outro está fora do âmbito normal de actividade dos matemáticos. Mas é claro, para Hilbert, em algumas das citações acima e não só, que a matemática é uma disciplina científica plena de significado, e que qualquer tentativa de a restringir com base em pressupostos filosóficos ou ideológicos (como parece fazer Brouwer) deve ser rejeitada. Por outro lado, Hilbert jamais desrespeita o papel da intuição e do pensamento intuitivo na actividade matemática e científica, em geral. Pelo contrário, como é visível na citação na pág. 10 acima, e em [16], p. 1120, onde diz que (itálico meu):

«O método axiomático é e há-de permanecer o instrumento indispensável, apropriado às nossas mentes, a toda a investigação exacta em qualquer domínio: é logicamente incontestável e ao mesmo tempo frutuoso; ele garante, portanto, a máxima flexibilidade na pesquisa. Proceder axiomaticamente significa, neste sentido, nada mais do que pensar *conscienciosamente*».

Na conferência em Hamburgo em 1927 ([19], em [11] p. 475) diz:

«O jogo de fórmulas que Brouwer tanto deprecia tem, além do seu valor matemático, um importante significado filosófico. Pois este jogo de fórmulas corre segundo determinadas regras, nas quais se exprime a *técnica do nosso pensamento.* Estas regras formam um sistema fechado, e podem ser descobertas e enunciadas uma vez por todas. A ideia fundamental da minha teoria da demonstração não é outra senão a de descrever a actividade da nossa compreensão, com vista a estabelecer um protocolo das regras conforme ao modo como o nosso pensamento realmente procede. Pensar, ao que parece, assemelha-se à fala e à escrita: formamos proposições que colocamos umas a seguir às outras. Se qualquer totalidade de observações e fenómenos merece ser objecto de investigação séria e profunda é esta — pois, afinal de contas, é parte da tarefa da ciência libertar-nos da arbitrariedade, do sentimento e dos hábitos e proteger-nos do subjectivismo que já se manifestou nos pontos de vista de Kronecker e, ao que me parece, culminou no intuicionismo».

Finalmente, a conferência "Sobre o infinito" termina assim (sublinhados meus):

«Portanto, para demonstrar a propriedade de consistência, necessitamos unicamente de provar que nenhuma demonstração, conforme às regras estabelecidas, pode terminar com a fórmula final «$0 \neq 0$», ou seja, que «$0 \neq 0$» não é uma fórmula demonstrável. E esta é uma questão que se coloca fundamentalmente no campo da intuição, do mesmo modo que se encontra no campo da teoria material dos números a tarefa, por exemplo, de demonstrar a irracionalidade de $\sqrt{2}$, isto é, de demonstrar que é impossível encontrar dois numerais $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ que estejam na relação $\mathfrak{a}^2 = 2\mathfrak{b}^2$, problema para o qual se tem de mostrar que é impossível exibir dois numerais com uma certa propriedade. A questão correspondente, para nós, é mostrar que é impossível exibir uma demonstração de certo tipo. Mas uma demonstração formalizada, assim como um numeral, é um objecto concreto e visualizável, que pode ser comunicado do princípio ao fim. Que a fórmula final possui a estrutura adequada, nomeadamente, «$0 \neq 0$», é também uma propriedade da demonstração que pode ser concretamente verificada. A demonstração de que «$0 \neq 0$» não é demonstrável pode de facto ser dada, o que nos fornece uma justificação para a introdução das nossas proposições ideais.[11]

[11]A questão não é tão simples como aqui parece sugerido, como se sabe (v. também o apêndice IX). Só em 1940 é que W. Ackermann produziu uma demonstração da consistência da aritmética de primeira

Vemos ao mesmo tempo, com agradável surpresa, que com isto resolvemos também uma questão candente durante muito tempo, a saber: o problema da demonstração da *consistência dos axiomas aritméticos*.[12] O problema da consistência surge sempre que se aplica o método axiomático. Afinal de contas, ao seleccionar, interpretar e manipular axiomas e regras, não queremos confiar apenas na boa fé e pura confiança. Na geometria e nas teorias físicas consegue-se a demonstração da consistência através de uma redução à consistência dos axiomas aritméticos. Este método falha, evidentemente, no caso da própria aritmética. A nossa teoria da demonstração, ao tornar possível este importante passo final através do método dos elementos ideais, constitui a cúpula do edifício da teoria axiomática. E aquilo que já experimentámos duas vezes, primeiro com os paradoxos do cálculo infinitesimal e, depois, com os paradoxos da teoria dos conjuntos, não poderá acontecer terceira vez e nunca voltará a acontecer.

Mas a nossa teoria da demonstração aqui esboçada não é apenas capaz de garantir os fundamentos da ciência matemática; creio, além disso, que ela desbrava um caminho que, a ser seguido, nos permitirá lidar pela primeira vez com problemas gerais de carácter fundamental que caem no domínio da matemática mas nunca puderam ser abordados antes.

A matemática evolui, em certo sentido, para a conversão num tribunal arbitral, um tribunal de última instância que decidirá questões de princípio — e em bases concretas tais, que o acordo universal é alcançável e todas as asserções podem ser verificadas.

Também as asserções da recente doutrina denominada «intuicionismo», ainda que modestas, podem, na minha opinião, obter o seu certificado de justificação somente por via deste tribunal.

Por último, quero recordar o nosso assunto principal e, no que ao infinito diz respeito, fazer o balanço das nossas reflexões. O resultado final é: o infinito não se encontra realizado em parte alguma; não está presente nem na natureza nem é admissível como fundamento do nosso pensamento racional — uma convergência notável entre ser e pensar. Adquirimos uma convicção em sentido contrário ao dos primeiros esforços de Frege e Dedekind, a convicção de que, para o conhecimento científico ser possível, são indispensáveis certas intuições e concepções intuitivas; a lógica só por si não basta. O direito a operar com o infinito só pode ser assegurado através do finito.

O papel que fica reservado ao infinito é simplesmente o de uma ideia — se se compreende por ideia, conforme as palavras de Kant, um conceito da razão que transcende toda a experiência e por meio do qual o concreto é completado de modo a formar uma totalidade; uma ideia, além disso, na qual só podemos confiar sem hesitações dentro do quadro fornecido pela teoria que aqui esbocei e defendi.» ([18], Apêndice VIII de [12], pp. 254–255).

Que formalismo é, então, o de Hilbert? Mais importante do que aquilo que Hilbert parece ter por vezes apregoado, é o que ele tentou pôr em prática, e a parte mais significativa disto é a seguinte: a justificação da matemática abstracta (formalizada) mediante uma prova de consistência só exige a aceitação da tese — chamemos-lhe *tese de Hilbert* — de que *a prática matemática informal pode ser representada adequadamente nos sistemas formais* e, assim, uma prova finitista de consistência mostrará que a prática informal, por muito abstracta ou infinitária que seja, é não contraditória, ou seja, uma justificação dos métodos abstractos utilizando métodos concretos.

O formalismo hilbertiano constitui, assim, uma maneira precisa, muito *sui generis,* de formular a questão da consistência; mas, vistas as coisas do exterior, Hilbert também é sensível a outros critérios como a beleza, a elegância, a utilidade e a aplicabilidade às outras ciências.

---

ordem com indução, mas utilizando na demonstração a indução transfinita até ao ordinal $\varepsilon_0 = \omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$. Entretanto, os metateoremas de incompletude de Gödel (1931) haviam já deitado por terra o programa «finitista» de Hilbert para provas de consistência de teorias «suficientemente fortes».

[12]Por «axiomas aritméticos» entende Hilbert, por vezes, os axiomas para os números reais (v. Apêndice VI).

Ele também tem em conta, portanto, tal como os intuicionistas, a importância de considerações estéticas e/ou pragmático-intuitivas na feitura da matemática, por um lado, enquanto a justificação dessa mesma matemática, formalizada num sistema formal, é feita mediante métodos intuicionisticamente aceitáveis. Ao contrário de outras visões propaladas sobre a natureza do formalismo, nomeadamente, pelo próprio Brouwer, Hilbert não defende que a matemática não tem *significado,* mas apenas que questões relativas ao significado são de natureza externa, diferentes das questões matemáticas, embora admita que nem todas as questões externas sejam insusceptíveis de investigação matemática — a *consistência* é uma delas.

O formalismo de Hilbert não é, como alguns poderão ter pensado, um formalismo exarcebado *à* Russell, mas sim um formalismo benigno, que para sobreviver precisava, apenas, de um remédio simples e natural — uma prova finitista de consistência. Hélas, tal remédio não existe, mas a *Teoria da Demonstração* permanece um dos ramos mais vigorosos da moderna lógica matemática com relevância para diversas aplicações nas ciências da computação.

5. Bibliografia

[1] Aspray, W., e Kitcher, P., *History and Philosophy of Modern Mathematics*, Univ. Minnesota Press, 1988.

[2] Barwise, J., *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland, 1977.

[3] Benacerraf, P., e Putnam, H., *Philosophy of Mathematics*, second edition, Cambridge Univ. Press, 1983.

[4] Cantor, G., *Foundations of a General Theory of Manifolds: a Mathematical-Philosophical Investigation into the Theory of The Infinite* (1883), em [6], vol. 2, pp. 878–920.

[5] Dedekind, R., *Essays on the Theory of Numbers: I. Continuity and Irrational Numbers (Stetigkeit und irrationale Zahlen,* 1872)*; II. The Nature and Meaning of Numbers (Was sind und was sollen die Zahlen?,* 1888*),* Dover, 1963; tb. em Ewald [6], pp. 765–779, 790–833; trad. port. de *II (Continuidade e números irracionais)* revista por A. J. Franco de Oliveira em *Bol. da Soc. Port. de Matemática* **41** (Outubro de 1999), pp. 97–119.

[6] Ewald, W. (ed.) *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics,* 2 vols., Clarendon Press, 1996.

[7] Fraenkel, A. A., Bar-Hillel, Y., e Levy, A., e Van Dalen, D. *Foundations of set theory*, second revised edition, North-Holland, 1973.

[8] George, A., e Velleman, D. J., *Philosophies of Mathematics*, Blackwell Publ., 2002.

[9] Grattan-Guiness, I., *The Search for Mathematical Roots (1870–1940),* Princeton U. P., 2000.

[10] Hatcher, W. S., *The Logical Foundations of Mathematics,* Pergamon Press, 1982.

[11] van Heijenoort, J. (ed.), *From Frege to Gödel, A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*, Harward U. P., 1967.

[12] Hilbert, D., *Fundamentos da Geometria* (*Grundlagen der Geometrie,* Teubner, 1899; 14.ª edição 1999), trad. port. baseada na 7.ª edição alemã (B. G. Teubner Verlag, Stuttgart, 1930; trad. ingl. por Leo Unger, revista por P. Bernays, Open Court P. C., 1971), com Apêndices do autor e Suplementos de P. Bernays, H. Poincaré e F. Enriques, por Maria do Pilar Ribeiro (col. de J. da Silva Paulo, 1952), Paulino Lima Fortes, A. J. Franco de Oliveira (col. de A. Vaz Ferreira), Gradiva, 2003;

[13] ———, Sobre o conceito de número (*Über den Zahlbegriff*, 1900), *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,* 1900, pp 180–194; trad. ingl. em [6], vol.2, pp. 1089–1095; Apêndice VI de [12];

[14] ———, Sobre os fundamentos da lógica e da aritmética *(Über dir Grundlagem der Logik und der Arithmetic), Actas do III Congresso Internacional de matemáticos* em Heidelberg, 1904); Apêndice VII de [12];

[15] ———, Pensamento Axiomático (*Axiomatisches Denken*, Zurique, 1917), *Math. Ann.*, Vol. 78 (1918), pp. 405–415, trad. ingl. em Ewald [6], pp. 1105–1115;

[16] ———, As novas fundamentações da matemática, Primeiro relatório (*Neubegründung der Mathematik, Erste Mitteilung*, Hamburgo 1922a); trad. ingl. em Ewald [6], pp. 1105–1115.

[17] ———, Os fundamentos lógicos da matemática (*Die logichen Grundlagen der Mathematik*, Leipzig, 1922b), *Math. Ann.* 88 (1923), pp. 157–165; trad. ingl. em Ewald [6], pp. 1134–1148.

[18] ———, Sobre o infinito (*Über das Unendliche*, Münster, 1925), *Math. Ann.*, Vol. 95 (1926) pp. 161–190,[13] versão abreviada no Apêndice VIII de [12];

[19] ———, Os fundamentos da matemática (*Die Grundlagen der Mathematik*, Hamburgo, 1927), *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* 6 (1928) pp. 65–85; trad. ingl. em van Heijenoort [11] pp. 464–479; versão abreviada no Apêndice IX de [12];

[20] ———, Problemas na fundamentação da matemática (*Probleme der Grundlegung der Mathematik*, Bolonha 1928), *Atti del Congresso internazionale dei matematici*, vol. 1, pp. 135–141; reimp. com emendas e acrescentos em *Math. Ann.* 102 (1929), pp. 1–9; Apêndice X de [12].

[21] ———, Os fundamentos da teoria elementar dos números (*Die Grundlegung der elementarem Zahlentheorie*), *Math. Ann.* 104 (1931), pp. 485–494; trad. ingl. em [6], vol. 2, pp. 1148–1157.

[22] Hilbert, D. e Ackermann, W., *Principles of Mathematical Logic* (*Grundzüge der Theorishen Logik*, 1928; segunda edição 1938), Chelsea 1950.

[23] Hodel, R. E., *An Introduction to Mathematical Logic*, PWS Publ., 1995.

[24] Kronecker, L., On the concept of number (*Über den Zahlbegriff*, 1887), *Journ. für die reine und angewandle Mathematik* 101 (1887), pp. 337–355; em Ewald [6], vol. 2, pp. 947–955.

[25] Mancosu, P., *From Brouwer to Hilbert, The debate on the Foundations of Mathematics in the 1920's*, Oxford U. P., 1998.

[26] Oliveira, A. J. Franco de, Teoremas de impossibilidade: marcos milenários na história da matemática, *Episteme*, Ano IV, 10–12 (2002), 2.ª série, pp. 307–313.

[27] Reid, C., *Hilbert*, Springer-Verlag, 1996.

[28] Russell, B., *The Principles of Mathematics* (1903), segunda edição, Allen and Unwin, 1937.

[29] Russell, B. e Whitehead, A. N., *Principia Mathematica*, 3 vols., Cambridge U. P. 1910–1913.

[30] Weyl, H., *The Continuum, A Critical Examination of the Foundation of Analysis* (*Das Kontinuum*, 1917), Dover, 1994.

[13]Conferência dada a 4 de Junho de 1925 por ocasião de um congresso organizado pela Sociedade Matemática da Westfália, em Münster, em homenagem a Weierstrass. O texto publicado neste apêndice omite, entre outras, uma longa passagem dedicada ao *problema do contínuo*, na qual Hilbert julga ter delineado uma prova da *Hipótese do Contínuo* de Cantor. O texto completo da tradução em inglês pode ser consultado na colectânea de van Heijenoort [11], pp. 369–392.

Anexo

Tabela com os principais resultados pertinentes aos Fundamentos (desde meados do séc. XIX até aos anos trinta do séc. XX)

Lógica Matemática		Matemática e Teoria dos Conjuntos
		PONCELET SACCHERI, GAUSS BOLYAI, LOBACHEWSKII
	1810-1830	Geom. projectiva, Geom. não-euclidianas
BOOLE, etc		BOLZANO
	1850	
FREGE		DEDEKIND, CANTOR
	1872	Aritmetização da Análise
Linguagens formais	1880	Teoria dos Conjuntos (intuitiva)
	1900	Numerabilidade, diagonalização
	PARADOXOS	
RUSSELL & WHITEHEAD	1908	ZERMELO
		Teoria Axiomática dos Conjuntos
Matemática = Lógica + Teoria dos Conjuntos		BROUWER Intuicionismo, Construcionismo
LÖWENHEIM	1915	
SKOLEM		FRAENKEL, HILBERT
Modelos Numeráveis		VON NEUMANN, BERNAYS
GÖDEL	1930	
Completude Semântica da Lógica de 1.ª ordem		
Incompletude da Aritmética Formal (ou: de Peano)	1931	

(HC): Hipótese do Contínuo,
(AC): Axioma da Escolha

$\vdash . *35{\cdot}64 . \quad \supset \vdash . \text{Ɑ}{}^{\backprime}(R \upharpoonright \Lambda) = \Lambda .$
$[*33{\cdot}241] \quad \supset \vdash . R \upharpoonright \Lambda = \dot{\Lambda}$ (2)
$\vdash . *35{\cdot}441{\cdot}21 . \supset \vdash . \Lambda \upharpoonleft R \upharpoonright \beta \Subset \Lambda \upharpoonleft R .$
$[(1) . *25{\cdot}13] \quad \supset \vdash . \Lambda \upharpoonleft R \upharpoonright \beta = \dot{\Lambda}$ (3)
$\vdash . *35{\cdot}44{\cdot}21 . \supset \vdash . \alpha \upharpoonleft R \upharpoonright \Lambda \Subset R \upharpoonright \Lambda .$
$[(2) . *25{\cdot}13] \quad \supset \vdash . \alpha \upharpoonleft R \upharpoonright \Lambda = \dot{\Lambda}$ (4)
$\vdash . (1) . (2) . (3) . (4) . \supset \vdash .$ Prop

$*35{\cdot}76$. $\vdash . V \upharpoonleft R = R \upharpoonright V = V \upharpoonleft R \upharpoonright V = R$

Dem.

$\vdash . *35{\cdot}1 . \quad \supset \vdash : x (V \upharpoonleft R) y . \equiv . x \in V . xRy .$
$[*24{\cdot}104 . *4{\cdot}73] \quad \equiv . xRy$ (1)
$\vdash . *35{\cdot}101 . \supset \vdash : x (R \upharpoonright V) y . \equiv . xRy . y \in V .$
$[*24{\cdot}104 . *4{\cdot}73] \quad \equiv . xRy$ (2)
$\vdash . *35{\cdot}102 . \supset \vdash : x (V \upharpoonleft R \upharpoonright V) y . \equiv . x \in V . xRy . y \in V .$
$[*24{\cdot}104 . *4{\cdot}73] \quad \equiv . xRy$ (3)
$\vdash . (1) . (2) . (3) . \supset \vdash .$ Prop

The rest of this number, down to $*35{\cdot}93$ exclusive, is concerned with $\alpha \uparrow \beta$, except $*35{\cdot}81{\cdot}812$.

$*35{\cdot}81$. $\vdash : x (\alpha \upharpoonleft \dot{V}) y . \equiv . x \in \alpha \quad [*35{\cdot}1 . *25{\cdot}104]$

$*35{\cdot}812$. $\vdash : x (\dot{V} \upharpoonright \beta) y . \equiv . y \in \beta \quad [*35{\cdot}101 . *25{\cdot}104]$

$*35{\cdot}82$. $\vdash . \alpha \uparrow \beta = \alpha \upharpoonleft \dot{V} \upharpoonright \beta$

Dem.

$\vdash . *35{\cdot}103 . \supset \vdash : x (\alpha \uparrow \beta) y . \equiv . x \in \alpha . y \in \beta .$
$[*25{\cdot}104] \quad \equiv . x \in \alpha . x \dot{V} y . y \in \beta .$
$[*35{\cdot}102] \quad \equiv . x (\alpha \upharpoonleft \dot{V} \upharpoonright \beta) y : \supset \vdash .$ Prop

$*35{\cdot}822$. $\vdash . \alpha \upharpoonleft R \upharpoonright \beta = R \dot{\wedge} (\alpha \uparrow \beta)$

Dem.

$\vdash . *35{\cdot}102 . \supset \vdash : x (\alpha \upharpoonleft R \upharpoonright \beta) y . \equiv . x \in \alpha . xRy . y \in \beta .$
$[*4{\cdot}3] \quad \equiv . xRy . x \in \alpha . y \in \beta .$
$[*35{\cdot}103] \quad \equiv . xRy . x (\alpha \uparrow \beta) y .$
$[*23{\cdot}33] \quad \equiv . x \{R \dot{\wedge} (\alpha \uparrow \beta)\} y : \supset \vdash .$ Prop

$*35{\cdot}83$. $\vdash : \text{D}{}^{\backprime}R \subset \alpha . \text{Ɑ}{}^{\backprime}R \subset \beta . \equiv . R \Subset \alpha \uparrow \beta$

Dem.

$\vdash . *33{\cdot}14 . \quad \supset \vdash :. xRy . \supset : x \in \text{D}{}^{\backprime}R . y \in \text{Ɑ}{}^{\backprime}R :$
$[*22{\cdot}46] \quad \supset : \text{D}{}^{\backprime}R \subset \alpha . \text{Ɑ}{}^{\backprime}R \subset \beta . \supset . x \in \alpha . y \in \beta$ (1)
$\vdash . (1) . \text{Comm} . \supset \vdash :. \text{D}{}^{\backprime}R \subset \alpha . \text{Ɑ}{}^{\backprime}R \subset \beta . \supset : xRy . \supset . x \in \alpha . y \in \beta .$
$[*35{\cdot}103] \quad \supset . x (\alpha \uparrow \beta) y$ (2)
$\vdash . *35{\cdot}103 . \quad \supset \vdash :. R \Subset \alpha \uparrow \beta . \supset : xRy . \supset_{x,y} . x \in \alpha . y \in \beta :$
$[*33{\cdot}35{\cdot}351] \quad \supset : \text{D}{}^{\backprime}R \subset \alpha . \text{Ɑ}{}^{\backprime}R \subset \beta$ (3)
$\vdash . (2) . (3) . \quad \supset \vdash .$ Prop

Uma página dos Principia Matemathica *de Russell & Whitehead*