Cours libre: *Trois Révolutions en Géométrie*

Par Prof. Luciano Boi (EHESS, Paris)

Centre de Philosophie des Sciences de l'Université de Lisbonne

30 avril, 2 et 4 mai, 2012

Présentations des sessions et information bibliographique

Session 1 *(30.04.2012):* "*Une première «révolution» en mathématiques: le passage d'un espace unique et plat à une pluralité d'espaces courbes et multidimensionnels (Riemann, Klein, Poincaré…)*"

Dans ce premier cours, on s'interrogera sur le statut de la géométrie telle qu'elle s'est développée de la seconde moitié du XIXe siècle au début du XXe, c'est-à-dire, entre les travaux de Riemann, Clifford, Beltrami, Helmholtz, Klein, Lie et Poincaré, et de Hilbert, Cartan et Weyl. Au cours de cette période, la géométrie connaît la transformation sans doute la plus fondamentale de son histoire, qui concerne aussi bien ses méthodes que ses concepts. Les relations de la géométrie aux autres branches des mathématiques, notamment l'algèbre et l'analyse, en résulteront profondément changées, de même que ses relations à la physique et aux autres sciences naturelles. Dès lors, on ne parlera plus de la géométrie ou de l'espace, mais *des géométries* et *des espaces*. La reconnaissance sur le plan mathématique d'une pluralité de géométries a constitué un fait historique capital. Pour la première fois, avec la découverte des géométries non euclidiennes, la conception d'une géométrie unique et d'un espace absolu se trouve complètement remise en question au profit d'une autre, radicalement différent: en tant que science des formes «pures», la géométrie appartient aux mathématiques au même titre que l'arithmétique et l'algèbre; tandis qu'en tant que sciences des formes réelles, elle est intimement liée à la physique. Riemann a été sans doute le premier à expliciter mathématiquement la double nature de l'espace. Dans son grand mémoire de 1954, "*Sur les hypothèses qui sont au fondement de la géométrie*" ("*Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*"), l'auteur introduit des idées mathématiques tout à fait nouvelles dont la valeur philosophique et la signification pour la physique apparaissent révolutionnaires pour l'époque. À la suite de Gauss, mais en généralisant de manière significative les intuitions de ce dernier, Riemann montre que l'espace euclidien, d'un point de vue purement mathématique, n'était qu'un cas particulier parmi d'autres espaces possibles et qu'il n'y avait pas raison de penser que l'espace physique correspondait à celui décrit par les axiomes de la géométrie euclidienne. Par conséquent, il pouvait exister non seulement plusieurs géométries, mais encore plusieurs espaces géométriques (types de variétés) et plusieurs espaces physiques différents. Il s'agissait assurément d'un tournant décisif qui a transformé en profondeur d'abord le paysage des mathématiques puis celui aussi des mathématiques. Dans la présentation, on analysera les étapes qui ont conduit à cette nouvelle conception et aux idées mathématiques qui en sont le fondement. En particulier, nous analyserons le mode de formation du concept de *variété* (*Mannigfaltigkeit*) chez Riemann et la manière dont s'est constituée la géométrie différentielle moderne. Le concept géométrique de variété entretient un lien essentiel avec le concept fonctionnel de «surface de Riemann», les deux pouvant être expliqués grâce à une conception *qualitative* ou *spatiale* des mathématiques. Nous donnerons également une interprétation épistémologique du concept de variété (d'espace courbe à plusieurs dimensions) et de sa signification. Enfin, nous montrerons que le concept de variété de Riemann et la théorie spatiale de la matière de Clifford, où l'espace est essentiellement identifié à courbure, sont à l'origine d'un mouvement fécond de géométrisation de la physique, qui a abouti dans la théorie de la relativité générale d'Einstein.

Références bibliographiques :

Boi, L., Flament, D., Salanskis, J.-M., *1830-1930: A Century of Geometry. Epistemology, History and Mathematics*, Springer-Verlag, "Lecture Notes in Physics", Heidelberg, 1992.

—, *Le problème mathématique de l'espace. Une quête de l'intelligible*, Préface de R. Thom, Springer, Berlin, 1995.

—, "Nouvelles dimensions mathématiques et épistémologiques du concept d'espace en physique, de Riemann à Weyl et à Witten", in *L'espace physique entre mathématiques et philosophie*, M. Lachièze-Rey (éd.), EDP Sciences, Paris, 2006, pp. 101-133.

—, "La géométrie : clef du réel ? Pensée de l'espace et philosophie des mathématiques", *Philosophiques*, 24 (2), 1997, pp. 389-430.

—, "Mannigfaltigkeit und Gruppenbegriff. Zur den Veränderungen der Geometrie im 19. Jahrhundert", *Mathematische Semesterberichte*, 41 (1), 1994, pp. 1-16.

—, "From Riemannian Geometry to Einstein's General Relativity Theory and Beyond: Spacetime Structures, Geometrization and Unification", in *Albert Einstein Century*

International Conference Proceedings, Conference Proceedings Series 861, J.M. Alimi and A. Füzfa (eds.), American Institute of Physics Publishers, Melville, pp. 1066-1075.

<u>Session 2</u> *(02.05.2012): "Une deuxième «révolution» en mathématiques: la nouvelle interaction entre géométrie et physique, d'un espace prédétermine à un espace-temps dynamique (Clifford, Minkowski, Einstein, Weyl)*"

L'existence de plusieurs géométries qui se réalisent également au point de vue de la physique (outre qu'à celui mathématique), a été montré de façon décisive grâce à la théorie de la relativité d'Einstein, bien que déjà notamment Riemann et Clifford eurent admis qu'une géométrie différente de celle euclidienne pouvait s'appliquer à notre espace physique. Mais pour arriver à admettre cela, il a fallu d'abord critiquer profondément la conception qu'on s'était fait de l'espace, qui n'était plus à penser, ni comme le lieu où peuvent se construire les figures, ni comme celui où se meuvent les corps. Dans son travail fondamental sur les hypothèses de la géométrie, Riemann a montré que la propriété de continuité est liée à la structure métrique de l'espace, ce qui signifie que chaque point, ainsi que ses variations infinitésimales, sont représentables par une fonction continue de ses différentielles. En plus, il exige que telles fonctions soient continument différentiables, ce qui définit le niveau *différentiable* du continu, après qu'il avait reconnu l'existence d'un premier niveau topologique de la continuité, qui pourrait être désigné par celui de la *dimensionnalité* – ce qui peut s'exprimer également en disant que le monde où nous vivons est un continu spatial à trois dimensions (ou une variété tridimensionnelle). Mais Riemann avance la possibilité qu'il existe un troisième niveau du continu, dont la nature n'est en rien assimilable aux autres que nous venons de mentionner, et où ses principes constitutifs ne feraient pas partie de la manière dont on se le représente abstraitement, comme cela est le cas pour le discret (les variétés discrètes, comme les variétés arithmétiques ou algébriques, sont constituées d'éléments dénombrables, alors que les variétés continues constituées de points sont mesurables au moyen de fonctions de la distance). D'après Riemann, les variétés continues (comme les variétés différentiables) pourraient avoir une origine de nature dynamique, c'est-à-dire que la propriété de continuité serait liée au contenu physique de l'espace. En d'autres termes, les phénomènes physiques et le type d'espace dans lequel ceux-ci se déroulent sont indissociables: l’espace imaginé par Riemann est non-vide (à la différence de celui pensé par Newton) et doué d’effets physiques qui se propageraient localement. À la suite de Riemann, Clifford a explicitement théorisé un programme cohérent en vue d’une interprétation géométrique des phénomènes physiques. Clifford reprend l’intuition de Riemann et fait l’hypothèse que l’espace physique (aussi bien à l’échelle macroscopique que à celle microscopique) ne soit ni homogène ni isotrope, qu’il soit courbe et non pas plat, comme dans la géométrie euclidienne, et susceptible de varier en présence de certains effets physiques, et que, par ailleurs, le comportement de la matière dépende de la manière dont varie la courbure de l’espace. Nous montrerons que la théorie spatiale de la courbure et de la matière développée par Clifford jouera un rôle important dans les développements de la relativité générale jusqu’à une époque récente, en particulier dans l’élaboration de la théorie géométrodynamique par J. A. Wheeler. L’influence de Riemann (et indirectement de Clifford) sur la nouvelle physique et en particulier sur Einstein a été énorme. En effet, la relativité générale de ce dernier est fondée sur le concept de variété différentiable de Riemann qui peut être équipée d’une métrique non euclidienne (hyperbolique, elliptique ou autre), et posséder des objets géométriques compliqués que l’on appelle des tenseurs de courbure. Ce sont des objets géométriques qui ont aussi une signification physique, puisqu’ils correspondent aux potentiels gravitationnels de la relativité générale. Cela veut dire, en d’autres termes, que les propriétés des phénomènes qui se déroulent à l’échelle de notre Univers reposent sur la structure géométrique et topologique d’une variété pseudo-riemannienne, dont l’espace-temps d’Einstein constitue le modèle physique par excellence.

Références bibliographiques:

Boi, L., “Theories of space-time in modern physics”, *Synthese*, 139 (2004), pp. 429-489.

—, “Géométrie de l’espace-temps et nature de la physique: quelques réflexions historiques et épistémologiques”, *Manuscrito*, 23 (1), 2000, pp. 31-98.

—, “Geometrical and topological foundations of Theoretical physics: from gauge theories to string program”, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 34 (2004), 1777-1836.

—, “Ideas of Geometrization, Geometric Invariants of Low-Dimensional Manifolds and Topological Quantum Field Theories”, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 6 (4), 2009, 1-54.

—, “Geometria e dinamica dello spazio-tempo nelle teorie fisiche recenti. Su alcuni problemi concettuali della fisica contemporanea”, *Giornale di Fisica*, Società Italiana di Fisica, 50 (1), 2009, 1-10.
—, “Clifford Geometric Algebras, Spin Manifolds, and Group Action in Mathematics and Physics”, *Advances in Applied Clifford Algebras*, 19 (3), 2009, 1-42.

Session 3 *(04.05.2012):* “*Une troisième «révolution» en mathématiques: la géométrie et l’engendrement des formes naturelles et perceptives (D’Arcy Thompson, Thom, les néo-gestaltistes)*”

La théorie des catastrophes élaborée par René Thom dans les années 1960 est un domaine de la topologie différentielle et elle fait partie de la théorie mathématique des singularités des applications différentiables, fondé par le mathématicien H. Whitney et ensuite développée par John Mather. La théorie des singularités est une généralisation des minima et maxima des fonctions. Whitney remplace les fonctions par des applications (mappings), c’est-à-dire des collections de fonctions multiples de plusieurs variables. Les bifurcations des systèmes dynamiques d’A. Andronov, déjà introduites par Henri Poincaré au début du siècle dernier dans le cadre de ses travaux sur la mécanique céleste et des systèmes de type chaotique, constituent l’un des ingrédients mathématiques essentiels de la théorie des catastrophes. Les bifurcations sont des objets géométriques caractérisés par un comportement instable; des lieux où une fonction cesse d’être linéaire et acquière plusieurs déterminations. Dans un sens plus général, le mot bifurcation indique toutes sortes de réorganisations qualitatives ou de métamorphoses d’entités différentes résultant d’un changement de paramètres dont elles dépendent. La théorie des catastrophes vise à décrire les phénomènes discontinus à l’aide de modèles mathématiques continus. En d’autres termes, la théorie a pour but de construire des modèles dynamiques continus les plus simples pouvant engendrer des morphologies, données empiriquement, ou des ensembles de phénomènes discontinus. Nous montrerons que la notion de *singularité* est l’une des plus fondamentales en mathématiques ; elle est au cœur de la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes, de la théorie des surfaces de Riemann, de la géométrie algébrique, de la topologie différentielle, et bien sûr de la théorie qualitative des systèmes dynamiques. Les singularités de la fonction sont en quelque sorte les vestiges de la topologie qu'on a «tuée»: on tue la topologie de la variété en l'appliquant dans l'axe réel, mais la topologie résiste, elle «crie», et ses cris se manifestent par l'existence de points critiques. D'où la notion de point singulier qui joue un rôle tout à fait fondamental dans la théorie des catastrophes. Le postulat de base de la théorie des catastrophes généralisée est que la forme sous laquelle tout objet apparaît à un observateur n'est autre que l'ensemble de catastrophes associé à une certaine dynamique. C'est ainsi que la frontière le séparant du milieu extérieur, dans des régions où elle ne présente pas d'accident, sera le plus souvent associée à une catastrophe de type *pli*. Mais elle peut se creuser d'un sillon, s'exfolier en une cloque, émettre un cil, auquel cas il faudra faire appel à la *fronce*, à la *queue d'aronde*, à *l'ombilic elliptique*. Enfin, bien de situations complexes peuvent être rencontrées, que seule la théorie généralisée peut décrire : catastrophes à bulles, à grumeaux, laminaires, filamenteuses. Elles font partie de notre paysage quotidien, au point que nous n'y prêtons même plus attention: c'est l'écume d'un bock de bière, c'est la condensation en pluie d'un nuage, se sont les lézardes d'un vieux mur, ce sont les dessins laissés sur le sable par la marée descendante. Il y a une sorte de réalité géométrique idéale dans les systèmes dynamiques étudiés par Thom, et c'est peut-être la raison (ou l'une des raisons) pour laquelle la forme d'une vague déferlant sur une plage évoque, irrésistiblement l'ombilic hyperbolique. Mais ces systèmes dynamiques (phénomènes naturels, processus vivants) ont aussi et en même temps un contenu signifiant, des significations qui, par l'intermédiaire de certaines prégnances physiques (lumière, son, chaleur, etc.), investissent le champ des observateurs en reconfigurant leurs centres d'intérêts et en faisant varier les indices d'attention à l'égard des objets et des événements. Nous montrerons que la théorie des catastrophes est avant tout une théorie de l'action, une théorie dynamique des possibles déploiements des formes. Autrement dit, ce à quoi s'intéresse la théorie des catastrophes, c'est la formulation d'une théorie dynamique de l'engendrement, du changement et de la stabilisation des formes naturelles et vivantes.

Références bibliographiques :

Boi, L., *Morphologie de l'invisible. Transformations d'objets, formes de l'espace, singularités phénoménales et pensée diagrammatique,* Presses Universitaires de Limoges, PULIM, 2011.

—, “Geometry of dynamical systems and topological stability : from bifurcations, chaos and fractals to dynamics in the natural and life sciences”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 21 (3), 2011, pp. 815-867.

—, “Images et digrammes des objets et leurs transformations dans l’espace”, *Visible*, 5 (2009), pp. 77-109.

—, “Topological ideas and structures in fluid dynamics”, *JP Journal of Geometry and Topology*, 8 (2), 2008, pp. 151-184.

—, “Topological Knot Theory and Macroscopic Physics”, in *Encyclopedia of Mathematical Physics*, J.-P. Françoise, G. Naber, T.S Sun (eds.), Elsevier, Oxford, 2006, pp. 319-327.

—, *Symétries, Brisures de Symétries et Complexité, en mathématiques, physique et biologie*, Peter Lang, Bern, 2006.