A LÓGICA DO INFINITO[1]

por

Henri Poincaré

Tradução e notas de
Augusto J. Franco de Oliveira
francoli@kqnet.pt

§ 1. — O QUE DEVE SER UMA CLASSIFICAÇÃO

[101] As regras ordinárias da lógica podem ser aplicadas sem alteração se considerarmos colecções contendo um número infinito de objectos? Eis uma questão que não se tinha colocado anteriormente, mas fomos levados a examinar quando os matemáticos que se especializaram no estudo do infinito se defrontaram subitamente com certas contradições pelo menos aparentes. Estas contradições provêm do facto de as regras da lógica terem sido mal aplicadas, ou de elas deixarem de ser válidas fora do seu domínio próprio, que é o das colecções formadas somente por um número finito de objectos? Creio que não será inútil dizer aqui algumas palavras sobre este assunto, e dar aos leitores uma ideia dos debates aos quais este problema deu lugar.

[102] A lógica formal não é outra coisa senão o estudo das propriedades comuns a todas as classificações; ela ensina-nos que dois soldados que fazem parte do mesmo regimento pertencem por isso mesmo à mesma brigada, e por conseguinte à mesma divisão, e é a isso que se reduz toda a teoria do silogismo.[2] Qual é então a condição para que as regras desta lógica sejam válidas? É que a classificação adoptada seja *imutável*. Aprendemos que dois soldados fazem parte do mesmo regimento, e queremos concluir daí que eles fazem parte da mesma brigada; podemos fazer isso desde que durante o tempo que nós levamos a fazer o nosso raciocínio, um dos dois homens não tenha sido transferido de um regimento para outro.

As antinomias mencionadas derivam todas do esquecimento desta condição tão simples: apoiaram-se numa classificação que não era imutável e que não podia sê-lo; bem se tomou a precaução de a *proclamar* imutável; mas esta precaução era insuficiente; era preciso torná-la efectivamente imutável e há casos onde isto não é possível.

Permitam-me retomar um exemplo citado pelo Sr. Russell. Era contra mim, aliás, que ele o invocava. Ele queria provar que as dificuldades não provinham da introdução do infinito actual, [103] visto que elas podiam estar presentes mesmo quando só consideramos números finitos.

Regressarei mais adiante a este ponto, mas não é disso que se trata de momento e escolho esse exemplo porque é divertido e põe bem em evidência o facto que acabo de assinalar.

Qual é o menor número inteiro[3] que não pode ser definido por uma frase com menos de cem palavras da língua francesa?[4] Para começar, este número existe?

Sim, pois com cem palavras da língua francesa, não se pode construir senão um número finito de frases, visto que o número de palavras do dicionário da língua francesa é limitado. Entre estas frases, haverá umas sem sentido ou que não definirão nenhum número inteiro. Mas cada uma delas poderá definir quando muito um único número inteiro. O número de inteiros susceptíveis de ser definidos desta maneira é portanto limitado; por conseguinte, há certamente inteiros que não podem sê-lo; e entre estes inteiros, há certamente um que é menor que todos os outros.

Não; pois se esse inteiro existisse, a sua existência implicaria uma contradição, visto que ele se encontraria definido por uma frase de menos de cem palavras da língua francesa, a saber pela própria frase que afirma que ele não pode ser assim definido.

Este raciocínio assenta numa classificação dos números inteiros em duas categorias, aqueles que [104] podem ser definidos por uma frase de menos de cem palavras da língua francesa e aqueles que não podem sê-lo. Ao colocar a questão, proclamamos implicitamente que esta classificação é imutável e que não começamos a raciocinar senão depois de a ter estabelecido definitivamente. Mas isso não é possível. A classificação não poderá ser definitiva enquanto não tivermos passado em revista todas as frases de menos de cem palavras, tivermos rejeitado aquelas que não têm sentido, e tivermos fixado definitivamente o sentido de aquelas que o possuem. Mas entre estas frases, há algumas que não podem ter sentido senão depois de a classificação ter terminado, que são aquelas onde está em questão a própria classificação. Em suma, a classificação dos números não pode ser terminada senão *depois* de terminada a triagem das frases, e esta triagem não pode ser terminada senão depois de a classificação ter terminado, de maneira que nem a classificação nem a triagem não poderão nunca ser terminados.

Estas dificuldades são encontradas muito mais frequentemente quando se trata de colecções infinitas. Suponhamos que queremos classificar os elementos de uma destas colecções e que o critério da classificação assenta em alguma relação do elemento a classificar com a colecção inteira. Uma tal classificação poderá alguma vez ser encarada como terminada? Não existe infinito actual, [105] e quando falamos de uma colecção infinita, queremos dizer uma colecção à qual podemos juntar indefinidamente novos elementos (semelhantemente a uma lista de subscritores que nunca fecha na expectativa de novos subscritores).[5] Ora a classificação só poderia ser terminada justamente quando esta lista fosse fechada; todas as vezes que juntamos novos elementos à colecção, modificamos esta colecção; podemos portanto modificar a relação desta colecção com os elementos já classificados; e como é segundo esta relação que estes elementos foram dispostos nesta ou naquela gaveta, pode acontecer que uma vez esta relação modificada, estes elementos não estejam mais na gaveta boa e sejamos obrigados a deslocá-los para outra. Enquanto houver novos elementos para introduzir, devemos recear ter de recomeçar todo o nosso trabalho; ora, não acontecerá nunca ficarmos sem novos elementos para introduzir; portanto a classificação não estará nunca terminada.

Daí uma distinção entre duas espécies de classificações, aplicáveis aos elementos das colecções infinitas; as classificações *predicativas,* que não podem ser perturbadas pela introdução de novos elementos; as classificações *impredicativas*, que a introdução de elementos novos obriga a refazer constantemente.

Suponhamos por exemplo que classificamos os [106] números inteiros em duas famílias segundo a sua grandeza. Podemos reconhecer se um número é maior ou menor que 10 sem ter de considerar as relações deste número com o conjunto dos outros números inteiros. Quando tivermos definido, digamos, os 100 primeiros números, saberemos quais deles são menores e quais são maiores que 10; quando introduzirmos em seguida o número 101, ou um qualquer dos números seguintes, aqueles dos 100 primeiros inteiros que eram menores que 10 permanecerão menores que 10, aqueles que eram maiores permanecerão maiores; a classificação é predicativa.

Imaginemos pelo contrário que queríamos classificar os pontos do espaço e que distinguimos aqueles que podem ser definidos num número finito de palavras daqueles que não o podem ser. Entre as frases possíveis, haverá as que fazem alusão à colecção inteira, isto é, ao espaço, ou a partes do espaço. Quando introduzirmos novos pontos no espaço, estas frases mudarão de sentido, elas não definirão mais o mesmo ponto; ou então elas perderão toda a espécie de sentido; ou ainda, elas adquirirão um sentido que não possuíam antes. E então pontos que não eram definíveis tornar-se-ão susceptíveis de ser definidos; outros que o eram deixarão de sê-lo. Eles deverão passar de uma categoria a [107] outra. A classificação não será predicativa.

Há bons espíritos que consideram que os únicos objectos sobre os quais é permitido raciocinar são aqueles que podem ser definidos num número finito de palavras, e eu ficaria sem graça se não os encarasse como bons espíritos, pois que vou mesmo defender em breve a sua opinião. Podemos todavia concordar que o exemplo precedente foi mal escolhido, mas é fácil de modificar.

Para classificar os números inteiros, ou os pontos do espaço, considerarei a frase que define cada número inteiro, ou cada ponto. Como pode acontecer que um mesmo número ou um mesmo ponto seja definido por muitas frases, colocaria estas frases por ordem alfabética e escolheria a primeira delas. Posto isto, esta frase termina por uma vogal ou por uma consoante, e podíamos fazer a classificação segundo este critério. Mas esta classificação não seria predicativa; pela introdução de novos inteiros, ou de novos pontos, frases que não tinham nenhum sentido poderão adquirir um. E então à lista das frases que definissem um inteiro ou um ponto já introduzido, seria necessário juntar novas frases, que eram até aqui desprovidas de sentido, que acabam de adquirir um, e que definissem precisamente este mesmo ponto. Pode acontecer que estas frases novas subam para o [108] topo na ordem alfabética, e que elas terminem por uma vogal, ao passo que as frases antigas terminavam por uma consoante. E então o nosso inteiro ou o nosso ponto que tinha sido provisoriamente colocado numa categoria, deverá ser transferido para outra.

Se pelo contrário classificamos os pontos do espaço segundo a grandeza das suas coordenadas, se convencionamos classificar na mesma categoria todos aqueles cuja abcissa é menor que 10, a introdução de novos pontos não modificará nada na classificação; os pontos já introduzidos que satisfaziam a condição não deixarão de a satisfazer depois desta introdução. A classificação será predicativa.

O que acabamos de dizer das classificações aplica-se imediatamente às definições. Toda a definição é com efeito uma classificação. Ela separa os objectos que satisfazem a definição daqueles que não a satisfazem, e coloca-os em duas classes distintas. Se ela procede, como diz a Escola, *per proximum genus e differentiam specificam*, é evidente que ela assenta sobre a subdivisão do género em espécies. Uma definição, tal como uma classificação, pode portanto ser ou não ser predicativa.

Mas aqui apresenta-se uma dificuldade. Retomemos o exemplo precedente. Os números inteiros pertencem à classe A ou à classe B, conforme sejam menores ou maiores que 10,5. Defini [109] certos números inteiros α, β, γ, … que reparti entre estas duas classes A e B. Defini e introduzi novos números inteiros. Disse que a repartição não era modificada e que por conseguinte a classificação era predicativa. Mas para que a posição do número α na classificação não seja modificada, não basta que os enquadramentos da classificação não tenham mudado, é ainda preciso que o número α permaneça o mesmo, isto é, que a sua definição seja predicativa. De modo que de um certo ponto de vista, não deveríamos dizer que uma classificação é predicativa de uma maneira absoluta, mas que ela é predicativa com respeito a um dado modo de definição.

§ 2. — OS NÚMEROS CARDINAIS

Não devemos esquecer as considerações precedentes quando definimos os números cardinais. Se consideramos duas colecções, podemos procurar estabelecer uma lei de correspondência entre os objectos destas duas colecções, de maneira que a todo o objecto da 1ª corresponda um objecto da 2ª e um só, e inversamente. Se isto é possível, dizemos que as duas colecções têm o mesmo número cardinal.

Mas aqui ainda convém que esta lei de correspondência seja predicativa. Se temos duas colecções infinitas, não poderemos nunca conceber estas duas colecções como esgotadas. Se supusermos [110] ter tomado na primeira um certo número de objectos, a lei de correspondência permitirá definir os objectos correspondentes da 2ª. Se introduzirmos em seguida novos objectos, poderá acontecer que esta introdução altere o significado da lei de correspondência, de tal maneira que o objecto A′ da 2ª colecção, que antes desta introdução correspondia a um objecto A da 1ª, deixe de lhe corresponder depois desta introdução. Neste caso a lei de correspondência não será predicativa.

É o que iremos explicar com dois exemplos opostos. Considero o conjunto dos números inteiros e o conjunto dos números pares. A cada inteiro n posso fazer corresponder o número par $2n$. Quando introduzir novos inteiros, será sempre o mesmo número $2n$ que corresponderá a n. A lei de correspondência é predicativa, e também é assim de todas as leis consideradas por Cantor para demonstrar, por exemplo, que o número cardinal dos números racionais é igual ao dos números inteiros, ou o dos pontos do espaço ao dos pontos de uma recta.

Suponhamos pelo contrário que comparamos o conjunto dos números inteiros com o dos pontos do espaço susceptíveis de serem definidos por um número finito de palavras e que estabeleço entre eles a correspondência seguinte. Faria a lista de todas [111] as frases possíveis, que ordenaria segundo o número de palavras, e poria por ordem alfabética aquelas que têm o mesmo número de palavras. Apagaria todas aquelas que não fazem sentido ou que não definissem nenhum ponto, ou que definissem um ponto já definido por uma das frases precedentes. Faria corresponder a cada ponto a frase que o define, e o *número* que esta frase ocupa na lista assim corrigida.

Assim que introduzir novos pontos, poderá acontecer que frases que eram desprovidas de sentido adquiram um; deveremos restituí-las à lista de onde tinham sido retiradas antes; e o número de todas as outras frases será alterado. As nossas correspondências serão totalmente desorganizadas; a nossa lei de correspondência não é predicativa.

Se não prestássemos atenção a esta condição na comparação dos números cardinais, seríamos conduzidos a paradoxos singulares. Convém portanto modificar a definição dos números cardinais especificando que a lei de correspondência sobre a qual se baseia esta definição deve ser predicativa.

Toda a lei de correspondência assenta numa dupla classificação. Devemos classificar os objectos das duas colecções que queremos comparar; e as duas classificações devem ser paralelas; se, por [112] exemplo, os objectos da 1ª se repartissem em classes, que se subdividissem em ordens, e estas em famílias, etc., deveria acontecer o mesmo com os objectos da 2ª. A cada classe da 1ª classificação deverá corresponder uma classe da 2ª e uma só, a cada ordem uma ordem e assim por diante, até chegarmos aos próprios indivíduos.

Vê-se então qual deve ser a condição para que uma lei de correspondência seja predicativa. É necessário que as duas classificações sobre as quais esta lei assenta sejam elas próprias predicativas.

§ 3. — O ARTIGO DO SR. RUSSELL

O Sr. Russell publicou no *American Journal of Mathematics*, vol. XXX, sob o título "Mathematical logic as based on the Theory of Types",[6] um artigo onde ele se apoia sobre considerações bastante semelhantes às que precedem. Depois de ter recordado alguns dos paradoxos mais célebres entre os lógicos, busca a sua origem e encontra-a com razão numa espécie de círculo vicioso. Fomos conduzidos a antinomias porque concebemos colecções que contêm objectos na definição dos quais entra a própria noção de colecção desses objectos. Utilizaram-se definições impredicativas; confundiu-se, diz o Sr. Russell, as palavras *all* e *any*, o que podemos [113] traduzir na língua francesa [portuguesa] pelas palavras *tous* [todo] e *quelconque* [qualquer].

Ele foi assim conduzido a imaginar aquilo a que chamou *hierarquia dos tipos*. Consideremos uma proposição verdadeira acerca de um indivíduo *qualquer* de uma classe dada. Por indivíduo qualquer, devemos entender primeiro todos os indivíduos desta classe que podemos definir sem nos servirmos da noção da própria proposição. Chamar-lhes-ei *indivíduos quaisquer de 1ª ordem*; quando afirmo que a proposição é verdadeira de todos estes indivíduos, afirmo uma proposição de 1ª ordem. Um indivíduo qualquer de 2ª ordem será então um indivíduo na definição do qual poderá intervir a noção desta proposição de 1ª ordem. Se afirmo a proposição acerca de todos os indivíduos de 2ª ordem, terei uma proposição de 2ª ordem. Os indivíduos de 3ª ordem serão aqueles em cuja definição pode intervir a noção desta proposição de 2ª ordem; e assim por diante.

Tomemos o exemplo de Épiménides. Um mentiroso de 1ª ordem será aquele que mente sempre excepto quando diz «sou um mentiroso de 1ª ordem»;[7] um mentiroso de 2ª ordem será aquele que mente sempre mesmo quando diz «sou um mentiroso de 1ª ordem», mas que não mente quando diz «sou um mentiroso de 2ª ordem». E assim por diante. E então quando

Epiménides nos disser: sou um mentiroso, podemos [114] perguntar-lhe: de que ordem? E é somente depois de ele ter respondido a esta legítima questão que a sua asserção terá sentido.

Passemos a um exemplo mais científico e consideremos a definição de número inteiro. Diz-se que uma propriedade é indutiva[8] se ela pertence a zero, e se ela não pode pertencer a n sem pertencer a $n+1$; dizemos que todos os números que possuem uma propriedade indutiva formam uma classe indutiva. Então um inteiro é por definição um número que possui todas as propriedades indutivas, isto é, que pertence a todas as classes indutivas.

Desta definição pode-se concluir que a soma de dois inteiros é um inteiro? Parece que sim; pois se n é um número inteiro, *dado*, os números x tais que $n+x$ é inteiro formam uma classe indutiva. O número x não seria portanto inteiro, se $n+x$ não o fosse. Mas a definição desta classe indutiva de que acabámos de falar não é predicativa, pois nesta definição (que nos ensina que $n+x$ deve ser inteiro) entra a noção de número inteiro que pressupõe a noção de todas as classes indutivas.

Donde a necessidade de empregar o desvio seguinte: chamemos classes indutivas de 1ª ordem a todas aquelas que podemos definir sem introduzir a noção [115] de inteiro, e inteiros de 1ª ordem os números que pertencem a todas as classes indutivas de 1ª ordem; chamemos em seguida classes indutivas de 2ª ordem àquelas que podemos definir introduzindo conforme necessário a noção de inteiro de 1ª ordem, mas sem fazer intervir a noção de inteiro de ordem superior; chamemos inteiros de 2ª ordem aos números que pertencem a todas as classes indutivas de 2ª ordem, e assim por diante. E então o que podemos demonstrar não é que a soma de dois inteiros é um inteiro, mas sim que a soma de dois inteiros de ordem K, é um inteiro de ordem $\mathrm{K}-1$.

Estes exemplos bastarão, penso, para fazer compreender aquilo que o Sr. Russell chama a hierarquia dos tipos. Mas então colocam-se diversas questões sobre as quais o autor não se pronunciou.

1º Nesta hierarquia introduzem-se sem dificuldade as proposições de 1ª, de 2ª ordem, etc., e em geral de nª ordem, sendo n um número inteiro finito qualquer. Será mesmo possível considerar proposições de ordem α, sendo α um número ordinal transfinito? Foi assim que o Sr. König imaginou uma teoria que não difere essencialmente da do Sr. Russell; ele serviu-se de uma notação especial, na qual designa por A(NV) os objectos de 1ª ordem, por $\mathrm{A(NV)}^2$ os de 2ª ordem, etc., sendo NV as iniciais da expressão [116] *ne varietur*. Ele não hesita em introduzir os $\mathrm{A(NV)}^\alpha$ onde α é transfinito, sem aliás explicar suficientemente o que entende por isso.

2° Se respondermos *sim* à primeira questão, será necessário explicar o que se entende por objectos de ordem ω, sendo ω o infinito ordinário, isto é, o primeiro número ordinal transfinito,[9] ou por objectos de ordem α; sendo α um ordinal transfinito qualquer.

3º Se pelo contrário respondermos *não* à 1ª questão, como poderemos fundar sobre a teoria dos tipos a distinção entre os números finitos e infinitos, visto que esta teoria é destituída de sentido se não se supõe esta distinção já feita antes?

4° Mais geralmente, quer respondamos sim ou não à 1ª questão, a teoria dos tipos é incompreensível, sem pressupor já constituída a teoria dos ordinais. Como poderemos fundar então a teoria dos ordinais sobre a dos tipos?

§ 4. — O AXIOMA DA REDUTIBILIDADE

O Sr. Russell introduziu um axioma novo que ele chama *axiom of reducibility*. Como não estou seguro de ter compreendido perfeitamente o seu pensamento, vou deixar-lhe a palavra. «We assume, that every function is equivalent, for all its values to [117] some predicative function of the same argument.»[10] Mas, para compreender esta asserção, é preciso remontar às definições dadas no princípio do artigo. O que é uma função, e que é uma função predicativa? Se uma proposição é afirmada de um objecto dado a, é uma proposição particular; se é afirmada de um objecto indeterminado x, é uma função proposicional de x. A proposição será de uma certa ordem na hierarquia dos tipos, e essa ordem não será a mesma qualquer que seja x, visto que ela dependerá da ordem de x. A função será então dita predicativa, se ela é de ordem K $+ 1$, quando x é de ordem K.

Depois destas definições o sentido do axioma não é ainda muito claro e alguns exemplos não seriam supérfluos. O Sr. Russell não os deu, e hesito em os dar de minha criação, porque receio trair o seu pensamento, que não estou certo de ter apreendido totalmente. Mas, mesmo sem o ter apreendido totalmente, uma coisa de que eu não duvidaria é que se trata de um novo axioma. Graças a este axioma, espera-se poder demonstrar o princípio de indução matemática; que isso seja possível, quero menos negá-lo do que suspeitar que este axioma não seja mais do que outra forma do mesmo princípio.[11]

E então não posso deixar de pensar em todas as pessoas que pretendem demonstrar o *postulatum* [118] de Euclides,[12] apoiando-se sobre uma das suas consequências, e encarando esta consequência como uma verdade auto-evidente. Que ganharam elas? Esta verdade, por mais evidente que seja, sê-lo-á mais do que o próprio *postulatum*?

Nada ganhamos, portanto, sobre o número de postulados; ganhamos ao menos em qualidade?

Em quê o novo axioma leva a melhor sobre o princípio de indução?

1º É susceptível de um enunciado mais simples e mais claro? É possível, pois aquele que o Sr. Russell nos dá pode sem dúvida ser melhorado; mas isto não é provável.

2° O axioma de redutibilidade é mais geral do que o princípio de indução? de sorte que não se possa demonstrar esse axioma a partir deste princípio?

3° Ou bem pelo contrário, o axioma é menos geral *em aparência* do que o princípio, de modo que não nos apercebamos imediatamente que o segundo esteja contido no primeiro, embora esteja de facto?

4° O emprego desse axioma é mais conforme às tendências naturais do nosso espírito; pode-se justificá-lo psicologicamente?

Limito-me a colocar estes questões; faltam-me os elementos para as resolver visto que não [119] cheguei mesmo a compreender completamente o sentido desse axioma.

Mas se, com as indicações demasiado sumárias dadas pelo Sr. Russell, não posso esperar penetrar totalmente nesse sentido, seja-me permitido pelo menos fazer algumas conjecturas. Considere-se uma proposição como por exemplo a definição de número inteiro; um inteiro finito é um número que pertence a todas as classes indutivas; esta proposição não tem sentido, por si mesma; ela não o terá excepto se precisarmos a ordem das classes indutivas em causa. Mas felizmente acontece o seguinte; todo o inteiro de 2ª ordem é *a fortiori* um inteiro de 1ª ordem, visto que pertencerá a todas as classes indutivas das duas primeiras ordens, e por conseguinte a todas as de 1ª ordem; do mesmo todo o inteiro de ordem K será *a fortiori* um inteiro de ordem $\mathrm{K}-1$. Somos assim levados a definir uma série de classes cada vez mais restritas, inteiros de 1ª, de 2ª, …, de nª ordem, cada uma contida na precedente. Chamarei inteiro de ordem ω a todo o número que pertença simultaneamente a todas estas classes; e esta definição de inteiro de ordem ω terá um sentido e poderá ser encarada como equivalente à definição inicialmente proposta para número inteiro que não o tinha. Isto é uma aplicação correcta [120] do axioma de redutibilidade, tal como o entende o Sr. Russell? Proponho este exemplo apenas timidamente.

Admitamo-lo porém, e retomemos o teorema a demonstrar a respeito da soma de dois inteiros. Estabelecemos que a soma de dois inteiros de ordem K é um inteiro de ordem $\mathrm{K}-1$, e queremos concluir daí que se x e n são dois inteiros de ordem ω, a soma $n+x$ é também um inteiro de ordem ω. E com efeito basta para isso estabelecer que é um inteiro de ordem K, por maior que seja K. Ora se n e x são dois inteiros de ordem ω, serão *a fortiori* inteiros de ordem $\mathrm{K}+1$, portanto em virtude do teorema já estabelecido, $n+x$ é um inteiro de ordem K.

C. Q. D.

É desta maneira que podemos servir-nos do axioma do Sr. Russell? Creio bem que não é nada disso e que o Sr. Russell daria ao raciocínio uma forma bem diferente, mas o fundo permaneceria o mesmo.

Não quero discutir aqui a validade deste modo de demonstração.

Limitar-me-ei de momento às observações seguintes. Fomos levados a introduzir ao lado da noção de objectos de ordem n, os objectos de ordem ω e cremos ter conseguido, no que concerne os inteiros, definir [121] esta noção nova. Mas isto nem sempre resulta; para Epiménides, por exemplo, isto não serviria de todo. O que assegurou o sucesso, é a circunstância seguinte.

A classificação estudada não era predicativa, e a adjunção de elementos novos obrigava a modificar a classificação dos elementos anteriormente introduzidos e classificados. Todavia esta modificação não se podia fazer senão num sentido; podíamos ser obrigados a transferir objectos da classe A para a classe B (a saber, da dos inteiros para a dos não inteiros), mas nunca a transferi-los da classe B para a classe A. Seria preciso uma convenção nova para definir os objectos de ordem ω no caso onde a modificação deveria ser feita tanto num sentido como no outro.

Em segundo lugar, a definição dos inteiros de ordem ω *não é a mesma* que a dos inteiros de ordem K, sendo K finito. Definimos os inteiros de ordem K *indutivamente*, deduzindo a noção de inteiro de ordem K da noção de inteiro de ordem $K - 1$. Definimos os inteiros, de ordem ω *por passagem ao limite*, fazendo depender esta nova noção de uma infinidade de noções anteriores, as dos inteiros de *todas* as ordens finitas. As duas definições seriam portanto incompreensíveis para alguém que não soubesse já o que é um número finito; elas pressupõem a distinção entre números finitos [122] e números infinitos. Não é portanto sobre elas que podemos esperar fundar esta distinção.

§ 5. — O ARTIGO DO SR. ZERMELO

É numa direcção completamente diferente que o Sr. Zermelo[13] busca a solução das dificuldades que nós mencionámos. Ele esforça-se por apresentar um sistema de axiomas *a priori*, que devem permitir-lhe estabelecer todas as verdades matemáticas sem ficar exposto à contradição. Há muitas maneiras de conceber o papel dos axiomas; podemos encará-los como decretos arbitrários que não são senão definições disfarçadas das noções fundamentais. É assim que no começo da geometria, o Sr. Hilbert[14] introduziu «*coisas*» que ele chama pontos, rectas e planos, e que, esquecendo ou parecendo esquecer por um instante o significado vulgar destas palavras, estipula entre estas *coisas* diversas relações que as definem.

Para que isto seja legítimo, é ainda preciso demonstrar que os axiomas assim introduzidos não são contraditórios, e o Sr. Hilbert conseguiu isto na perfeição no que concerne a Geometria; porque ele supôs a Análise já constituída e pôde assim servir-se dela para esta demonstração.[15] O Sr. Zermelo não demonstrou que os seus axiomas eram isentos de contradição, e não o poderia ter feito, pois, para [123] isso, teria sido necessário apoiar-se sobre outras verdades já estabelecidas; ora, verdades já estabelecidas, uma ciência já feita, supõe ele que ainda não há e faz disso tábua rasa, mas quer que os seus axiomas se sustentem totalmente a si mesmos.

Os postulados não podem portanto extrair o seu valor de uma espécie de decreto arbitrário, é ainda preciso que eles sejam auto-evidentes. Será preciso, portanto, não demonstrar esta evidência, visto que a evidência não se demonstra, mas procurar penetrar o mecanismo psicológico que criou este sentimento de evidência. Eis de onde provém a dificuldade: o Sr. Zermelo admite certos axiomas, e rejeita outros que, numa primeira abordagem, podem parecer tão evidentes como aqueles que ele conserva; se ele os conservasse todos, cairia na contradição, sendo portanto necessário fazer uma escolha, mas podemos perguntar quais são as razões da sua escolha, e é isto que nos obriga a alguma atenção.

Assim, ele começa por rejeitar a definição de Cantor: um conjunto é a reunião de objectos distintos quaisquer considerados como formando um todo.[16] Não tenho portanto o direito de falar do conjunto de todos os objectos que satisfazem tal ou tal condição. Estes objectos não formam um conjunto, uma *Menge*, mas é bem preciso pôr qualquer coisa no lugar da definição que se rejeita. [124] O Sr. Zermelo limita-se a dizer: consideremos um domínio (*Bereich*) de objectos quaisquer; pode acontecer que entre dois destes objectos x e y, haja uma relação da forma $x \in y$; diremos então que x é um elemento de y, e que y é um conjunto, uma *Menge*.

É evidente que isto não é uma definição, pois seja quem for que não saiba o que é que uma *Menge*, não ficará a saber mais quando tiver aprendido que ela é representada pelo símbolo $\in$, visto que não sabe o que é $\in$. Isto passaria se este símbolo $\in$ viesse a ser definido no seguimento pelos próprios axiomas, que seriam encarados como decretos arbitrários. Mas acabamos de ver que este ponto de vista é insustentável. É necessário portanto que saibamos de antemão o que é que uma *Menge*, que tenhamos uma intuição dela, e é esta intuição que nos fará compreender o que é $\in$, que sem isso não seria senão um símbolo desprovido de sentido, e sobre o qual não se poderia afirmar nenhuma propriedade evidente por si mesma. Mas o que poderá ser esta intuição se não for a definição de Cantor que nós rejeitámos com desdém?

Passemos sobre esta dificuldade que tentaremos esclarecer mais adiante e enumeremos os axiomas admitidos pelo Sr. Zermelo; eles são em número de sete:

[125] 1º [Extensionalidade] Duas *Mengen* que têm os mesmos elementos são idênticas.

2º [Conjuntos Elementares] Há uma *Menge* que não contém nenhum elemento, é a *Nullmenge*; se existe um objecto a, existe uma *Menge* $\{a\}$ cujo único elemento é esse objecto; se existem dois objectos a e b, existe uma *Menge* $\{a, b\}$ cujos únicos elementos são estes dois objectos.[17]

3° [Separação] O conjunto de todos os elementos de uma *Menge* M que satisfazem uma condição x forma um subconjunto, uma *Untermenge* de M.[18]

4º [Partes] A cada *Menge* T corresponde uma outra *Menge* UT, formada por todas as *Untermengen* de T.[19]

5° [União] Consideremos uma *Menge* T cujos elementos são eles mesmos *Mengen*; existe uma *Menge* ST, cujos elementos são os elementos dos elementos de T.[20] Se por exemplo T tem três elementos A, B, C, que são eles mesmos *Mengen*; se A tem dois elementos a e a', B dois elementos b e b', C dois elementos c e c', ST terá seis elementos a, b, c, a', b', c'.[21]

6° [Escolha] Se temos uma *Menge* T cujos elementos são eles mesmos *Mengen*, podemos escolher em cada uma destas *Mengen* elementares um elemento, e o conjunto dos elementos assim escolhidos forma uma *Untermenge* de ST.

7° [Infinito] Existe pelo menos uma *Menge* infinita.

Antes de discutir estes axiomas, devo responder [126] a uma questão; por que razão conservei o nome alemão *Menge* nos enunciados em vez de o traduzir pelo termo francês [português] *ensemble* [*conjunto*]? É porque não tenho a certeza que o termo *Menge* conserve nestes axiomas o seu sentido intuitivo, sem o que seria difícil rejeitar a definição de Cantor; ora o termo *conjunto* sugere este sentido intuitivo de uma maneira demasiado imperiosa para que possamos utilizá-lo sem inconveniente quando esse sentido é alterado.

Não insistirei muito sobre o 7º axioma; devo todavia dizer uma palavra para salientar a maneira muito original pela qual o Sr. Zermelo o enuncia; com efeito, ele não se contenta com o enunciado que eu formulei; diz ele: existe uma *Menge* M que não pode conter o elemento a sem conter igualmente como elemento a *Menge* $\{a\}$, quer dizer, aquela cujo único elemento é a. E então se M admite o elemento a, ela admitirá uma série de outros, a saber a *Menge* cuja único elemento é a, a *Menge* cujo único elemento é a *Menge* cujo único elemento é a e assim por diante.[22] Vê-se bem que o número de estes elementos deve ser infinito. Em primeiro lugar, este desvio parece bem bizarro e artificial, e realmente é ambas as coisas; mas o Sr. Zermelo quis evitar pronunciar a palavra infinito, porque ele considera estes axiomas como anteriores à distinção entre finito e infinito.

Passemos aos seis primeiros axiomas; eles podem [127] ser encarados como evidentes, desde que dermos à palavra *Menge* o seu sentido intuitivo e *se não considerarmos senão objectos em número finito*. Mas eles não são mais evidentes que este outro axioma que o autor rejeita expressamente:

8° [Compreensão] *Quaisquer objectos formam uma Menge*.

Devemos então colocar uma questão; por que razão cessa a evidência do axioma 8 desde que se trate de colecções infinitas, enquanto a dos seis primeiros subsiste?

Se, para resolver esta questão, nos reportarmos aos enunciados dos axiomas, teremos um primeiro espanto; constataremos que todos estes axiomas sem excepção não nos ensinam senão uma coisa, que certas colecções, formadas segundo certas leis, constituem *Mengen*; de maneira que estes axiomas não nos parecerão mais do que regras destinadas a estender o sentido da palavra *Menge*, como se fossem puras definições de palavras. E isso é verdadeiro tanto do 8° axioma que rejeitamos, como dos sete primeiros que aceitamos.

Rapidamente, porém, somos avisados que esta primeira impressão é enganosa; semelhantes definições de palavras não nos exporiam à contradição; esta não seria de recear desde que não houvesse outros axiomas a afirmar que certas colecções *não são Mengen*: mas [128] não os temos. Todavia se rejeitamos o 8º axioma, é para evitar a contradição: o Sr. Zermelo di-lo explicitamente.

É preciso portanto que ele não tenha considerado os seus axiomas como simples definições de palavras, e que tenha atribuído à palavra *Menge* um sentido intuitivo pré-existente a todos os seus enunciados, embora diferindo um pouco do sentido habitual. Não é impossível perceber isto, ao investigar a utilização que o autor faz disso nos seus raciocínios. Uma *Menge* é algo sobre a qual podemos raciocinar; é algo fixo e imutável em certa medida. Definir um conjunto, uma *Menge*, uma colecção qualquer, é sempre fazer uma classificação, separar os objectos que pertencem a esse conjunto daqueles que não pertencem. Diremos então que esse conjunto não é uma *Menge*, se a classificação correspondente não é predicativa, e que é uma *Menge*, se esta classificação é predicativa ou se podemos pensar como se ela o fosse.

Se rejeitamos o 8º axioma, é porque objectos quaisquer formarão sem dúvida uma colecção, mas uma colecção que não será nunca fechada, e cuja ordem poderá a cada instante ser perturbada pela adjunção de elementos inesperados. É uma colecção que não é predicativa e, pelo contrário, quando dizemos por exemplo que a [129] cada *Menge* T corresponde uma outra *Menge* UT ou ST definida de tal ou tal maneira, afirmamos que esta definição é predicativa, ou que temos o direito de proceder como se fosse.

E é aqui o lugar para falar de uma distinção, que desempenha um papel essencial na teoria do Sr. Zermelo: «Eine Frage oder Aussage E, ueber deren Gültigkeit oder Ungültigkeit die Grundbziehungen das Bereiches vermög der Axiome und der allgemeingültigen logischen Gesetze ohne Willkür unterscheiden, heisst *definit*.»[23] A palavra *definit* parece aqui sensivelmente sinónima de predicativa.[24] Mas a utilização que de facto o Sr.

Zermelo faz dela mostra que a sinonímia não é perfeita. Assim, suponhamos por exemplo que esta questão E seja a seguinte: tal elemento da *Menge* M possui tal relação com *todos os outros* elementos da mesmo *Menge*, e que convencionamos dizer que todos os elementos para os quais devemos responder *sim* formam uma classe K? Para mim, e creio que também para o Sr. Russell, uma tal questão não é predicativa; porque *os outros* elementos de M são em número infinito, que poderemos sem cessar introduzir novos elementos, e que entre os novos elementos introduzidos, poderá haver alguns em cuja definição entre a noção da classe K, isto é, do conjunto dos elementos que possuem a propriedade E. Para o Sr. Zermelo, esta [130] questão seria *definit* sem que eu saiba exactamente onde é a demarcação exacta entre as questões que são *definit* e aquelas que não o são. Parece-lhe que, para saber se um elemento possui a propriedade E com respeito a todos os outros elementos de M, basta verificar se ele a possui com respeito a cada um deles. Se a questão é *definit* com respeito a cada um dos seus elementos, ela o será *ipso facto* com respeito a *todos* estes elementos.

E é aqui que aparece a divergência dos nossos pontos de vista. O Sr. Zermelo proibe-se de considerar o conjunto de todos os objectos que satisfazem a uma certa condição porque lhe parece que esse conjunto não é fechado; que poderemos sempre fazer entrar nele novos objectos. Pelo contrário ele não tem nenhum escrúpulo em falar do conjunto dos objectos que fazem parte de uma certa *Menge* M e que além disso satisfazem uma certa condição. Parece que ele não pode possuir uma *Menge*, sem possuir ao mesmo tempo todos os seus elementos. Entre estes elementos, ele escolherá aqueles que satisfazem uma condição dada, e poderá fazer esta escolha tranquilamente, sem receio que venham perturbá-lo com a introdução de elementos novos e inesperados, visto que ele *já* tem todos estes elementos entre as mãos. Ao dispor previamente da sua *Menge* M, ele levantou um muro de clausura que barra todos os perturbadores que poderiam vir de fora. Mas ele não se questiona se não poderá [131] haver perturbadores de dentro que enclausurou consigo no seu muro. Se a *Menge* M tem uma infinidade de elementos, isso não quer dizer que estes elementos possam ser todos concebidos como previamente existentes, mas sim que podem indefinidamente nascer novos elementos; eles nascerão no interior do muro, em vez de nascer do lado de fora, é tudo. Quando falo de todos os números inteiros, quero dizer todos os números inteiros que foram inventados e todos aqueles que poderemos inventar um dia; quando falo de todos os pontos do espaço, quero dizer todos os pontos cujas coordenadas sejam exprimíveis por números racionais, ou por números algébricos, ou por integrais, ou de qualquer outra maneira que possamos inventar. E é este «*poderemos*» que é o infinito. Mas poderemos inventar o que definiremos de muitas maneiras, e se retomarmos como acima a nossa questão E e a nossa classe K, a questão E põe-se de novo cada vez que definirmos um novo elemento de M; ora, entre estes elementos que poderemos definir, haverá algum cuja definição dependerá desta classe K. De modo que não terá sido evitado o círculo vicioso.

Eis por que razão os axiomas do Sr. Zermelo não saberiam satisfazer-me. Não somente eles não me parecem evidentes, mas quando me perguntarem se eles são isentos de contradição, eu não [132] saberei o que responder. O autor julgou evitar o paradoxo do maior cardinal, impedindo toda a especulação fora do recinto de uma *Menge* bem fechada; ele julgou evitar o paradoxo de Richard, ao não colocar senão questões *definit*, o que, de acordo com o sentido que dá a esta expressão, exclui toda a consideração sobre os objectos que podem ser definidos num número finito de palavras. Mas se ele bem fechou o seu curral, não tenho a certeza que não tenha encerrado também o lobo. Não ficaria tranquilo excepto se ele tivesse demonstrado que estava ao abrigo da contradição; sei bem que ele não podia fazê-lo, visto que teria sido preciso apoiar-se por exemplo no princípio de indução, de que não duvidava, mas que se propunha demonstrar mais adiante. Ele deveria ter ido mais longe; isso teria sido ao preço de uma falha na lógica, mas pelo menos teríamos a certeza disso.

§ 6. — O EMPREGO DO INFINITO

É possível raciocinar sobre objectos que não podem ser definidos num número finito de palavras? É mesmo possível falar deles sabendo de que se fala, e em pronunciando outra coisa que palavras vazias? Ou pelo contrário devemos encará-los como impensáveis? Quanto a mim, não hesito em responder que eles são puros nadas.

[133] Todos os objectos que teremos alguma vez de considerar, ou serão definidos num número finito de palavras, ou serão apenas imperfeitamente determinados, e permanecerão indiscerníveis de uma multidão de outros objectos; e não poderemos raciocinar adequadamente a seu respeito, enquanto não os tivermos distinguido desses outros objectos com os quais permanecem confundidos, isto é, enquanto não os definirmos num número finito de palavras.

Se consideramos um conjunto, e queremos definir os seus diferentes elementos, esta definição decompor-se-á naturalmente em duas partes; a primeira parte da definição, comum a todos os elementos do conjunto, ensina-nos a distingui-los dos elementos que são estranhos a esse conjunto; esta será a definição do conjunto; a segunda parte nos ensinará a distinguir uns dos outros os diferentes elementos do conjunto.

Cada uma destas duas partes deverá ser composta de um número finito de palavras. Se falamos de todos os elementos de um conjunto cuja definição foi dada, queremos falar de todos os objectos que satisfazem à primeira parte da definição e que poderemos conseguir definir por uma tal frase com um número finito de palavras à nossa vontade. Não vos damos senão metade da definição, podeis [134] em seguida completá-la, escolhendo a segunda metade como quiserdes; mas é preciso que a completeis. Se afirmo uma proposição a respeito de todos os objectos de um conjunto, quero dizer que se um objecto satisfaz à primeira parte da definição, a proposição no que concerne esse objecto permanecerá verdadeira, seja qual for a maneira como enuncieis a segunda parte; mas se podeis enunciá-la como quiserdes, é necessário que a enuncieis efectivamente, sem o que o objecto seria impensável e a proposição não teria nenhum sentido.

Não é o caso de não se poderem fazer ou de não se terem feito reparos a esta maneira de ver as coisas. As frases com um número finito de palavras poderão ser sempre numeradas, visto que podemos por exemplo classificá-las por ordem alfabética. Se todos os objectos pensáveis devem ser definidos por semelhantes frases, poderemos também atribuir-lhes um número. Não haveria portanto mais objectos pensáveis do que números inteiros; e se considerarmos o espaço, por exemplo, se excluírmos os pontos que não podem ser definidos num número finito de palavras e que são puros nadas, não restariam mais pontos do que números inteiros. Mas Cantor demonstrou o contrário.[25]

Iste não é senão um logro; representar os pontos do espaço pelas frases que servem para os definir; classificar estas frases e os pontos correspondentes [135] segundo as letras que formam estas frases; é construir uma classificação que não é predicativa, que acarreta todos os inconvenientes, todos os paralogismos, todas as antinomias de que falei no começo deste capítulo. Que quis dizer Cantor e o que é que ele realmente demonstrou? Não podemos encontrar, entre os números inteiros e os pontos do espaço definíveis num número finito de palavras, uma lei de correspondência que satisfaça as condições seguintes:

1º Esta lei pode ser enunciada num número finito de palavras.

2° Sendo dado um inteiro qualquer, podemos encontrar o ponto do espaço correspondente, e este ponto será totalmente definido sem ambiguidade; a definição deste ponto que se compõe de duas partes, a definição do inteiro e o enunciado da lei de correspondência, se reduzirão a um número finito de palavras, visto que o nosso inteiro se pode definir, e a nossa lei ser enunciada num número finito de palavras.

3° Sendo dado um ponto P do espaço que suponho definido num número finito de palavras (*sem que isso me impeça de fazer figurar nesta definição alusões à própria lei de correspondência*, o que é essencial na demonstração de Cantor) haverá um inteiro que será determinado sem ambiguidade pelo enunciado da lei de correspondência e pela definição do ponto P.

4° A lei de correspondência deve ser predicativa, isto é, que se ela de facto faz corresponder um ponto P a um inteiro, [136] ela não deverá deixar de fazer corresponder este ponto P a este mesmo inteiro, quando forem introduzidos novos pontos no espaço. Eis o que Cantor demonstrou e permanece verdadeiro para sempre; vê-se qual é o sentido complicado que encerra esta breve proposição: o número cardinal dos pontos do espaço é maior que o dos inteiros.

E então que devemos nós concluir? Todo o teorema das matemáticas deve poder ser verificado. Quando enuncio este teorema, afirmo que todas as verificações que eu tentar terão sucesso; e mesmo se uma destas verificações exige um trabalho que excederia as forças de um homem, afirmo que, se muitas gerações, cem, se preciso for, se juntarem no propósito de se dedicarem a esta verificação, ela resultará ainda. O teorema não tem outro sentido, e isso é ainda verdadeiro se no seu enunciado se fala de números infinitos; mas como as verificações só podem incidir sobre números finitos, segue que todo o teorema sobre os números infinitos ou sobretudo sobre o que se chama conjuntos infinitos, ou cardinais transfinitos, ou ordinais transfinitos, etc., etc., não pode ser senão uma maneira abreviada de enunciar proposições sobre os números finitos. Se não for assim, este teorema não será verificável, e se ele não é verificável, não terá sentido.

Segue que ele não saberia ter um axioma [137] evidente sobre os números infinitos; toda a propriedade dos números infinitos não é senão a tradução de uma propriedade dos números finitos; é esta última que poderá ser evidente, enquanto que será necessário demonstrar a primeira em comparação com a última e mostrar que a tradução é exacta.

§ 7. — RESUMO

As antinomias às quais certos lógicos foram conduzidos derivam do facto de eles não terem podido evitar certos círculos viciosos. Isso aconteceu enquanto consideravam colecções finitas, mas aconteceu bem mais frequentemente quando tinham a pretensão de lidar com colecções infinitas. No primeiro caso, teriam podido evitar facilmente a armadilha onde caíram; ou mais exactamente eles próprios estenderam a armadilha onde divertidamente tombaram, e mesmo assim tiveram de prestar muita atenção para não tombar ao lado da armadilha; numa palavra, neste caso as antinomias não são mais do que brincadeiras. Bem diferentes são aquelas que gera a noção de infinito; acontece frequentemente que nelas caímos sem ser de propósito, e mesmo quando estamos avisados, ainda assim não ficamos tranquilos.

As tentativas que foram feitas para sair destas [138] dificuldades são interessantes a mais de um título, mas elas não são totalmente satisfatórias. O Sr. Zermelo quis construir um sistema impecável de axiomas; mas estes axiomas não podem ser encarados como decretos arbitrários, visto que seria preciso demonstrar que estes decretos não são contraditórios, e que ao fazer disso tábua rasa não restaria mais nada sobre que basear uma tal demonstração. É necessário portanto que estes axiomas sejam evidentes por si mesmos. Ora, qual é o mecanismo pelo qual eles foram construídos? Tomaram-se axiomas que são verdadeiros para as colecções finitas; não se podia estendê-los todos às colecções infinitas, fez-se esta extensão apenas para um certo número deles, escolhidos mais ou menos arbitrariamente. A meu ver, aliás, como disse mais acima, nenhuma proposição sobre as colecções infinitas pode ser evidente por intuição.

O Sr. Russell compreendeu melhor a natureza da dificuldade a ultrapassar, mas não a venceu totalmente, porque a sua hierarquia dos tipos supõe a teoria dos ordinais já feita.

Quanto a mim, proporia aderir às regras seguintes:

1º Nunca considerar senão objectos susceptíveis de ser definidos num número finito de palavras;

2º Nunca perder de vista que toda a proposição [139] sobre o infinito deve ser a tradução, o enunciado abreviado de uma proposição sobre o finito;

3º Evitar as classificações e as definições impredicativas.

Todas as investigações de que falámos têm um carácter comum. Propõe-se ensinar as matemáticas a um aluno que não saiba ainda a diferença que existe entre o infinito e o finito; não nos precipitamos a ensinar-lhe em que consiste esta diferença; começamos por lhe mostrar tudo o que podemos saber do infinito sem nos preocuparmos com aquela; depois, numa região afastada do campo que lhe fizémos percorrer, fazemos-lhe descobrir um recanto onde se escondem os números finitos.

Isto parece-me psicologicamente falso; não é assim que o espírito humano procede naturalmente, e mesmo assim quando deveríamos avançar sem demasiadas desventuras antinómicas, isso não seria menos um método contrário a toda a sã psicologia.

O Sr. Russell dir-me-á sem dúvida que não se trata de psicologia, mas de lógica e de epistemologia; mas eu seria levado a responder que não existe lógica nem epistemologia independentes da psicologia; esta profissão de fé termina provavelmente a discussão porque ela porá em evidência uma irremediável divergência de pontos de vista.

NOTAS

[1]Tradução do Cap. IV de *Dernières Pensées,* Flammarion, 1913, pp. 99-139, publicado pela primeira vez em *Revue de Métaphysique et de Morale* XVII (1909) pp. 461-482. Este artigo não se deve confundir com um outro com o mesmo título baseado numa conferência dada por Poincaré em 1912 e publicado na revista *Scientia* **12** (1912), pp. 1-11. Em compilações (e traduções) recebeu o título “Les Mathématiques et la Logique”. Aquele livro foi traduzido em inglês, com o título *Mathematics and Science: Last essays,* Dover, 1963, e o artigo foi reproduzido em G. Heinzmann (editor), *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano. Textes de la discussion (1906-1912) sur les fondements des mathématiques: des antinomies à la predicativité,* Blanchard, 1986.

Indicam-se dentro de colchetes [...] os números de página do original que serviu de base à tradução, bem como eventuais comentários ou inserções do tradutor no texto. As notas finais são do tradutor.

[2]Referência ao silogismo aristotélico *Barbara* (da forma

$$\text{Todo } P \text{ é } Q\text{; Todo } Q \text{ é } R \;/\; \text{Todo } P \text{ é } R\text{),}$$

e mataforicamente às formas válidas de raciocínio da lógica clássica, em geral.

[3]O autor utiliza o termo «inteiro» com o significado de número natural ou inteiro não negativo no sentido usual.

[4]Referência a uma versão simplificada do Paradoxo de Richard, conhecida por Paradoxo de Berry. Uma discussão aprofundada sobre os paradoxos lógicos e semânticos, numa perspectiva de fundamentos da matemática, pode ser encontrada em A.A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, A. Levy, D. Van Dalen, *Foundations of Set Theory*. Second revised edition, North-Holland, 1973.

[5]Este é o chamado *infinito potencial*, em consonância com outros (mais ou menos pretensos) construtivistas da «Escola de Paris» (Baire, Borel, Lebesgue), na senda de Kronecker e Brouwer.

[6]*Amer. J. Math.* 30 (1908), pp. 222-262; reimp. em Van Heijenoort (editor), *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic (1879-1931)*, Harvard U. P., 1967, pp. 150-182.

[7]As aspas estão omissas no original.

[8]O termo utilizado pelo autor é «récurrente» (recorrente), mas adoptámos em todo o artigo a terminologia estabelecida na língua portuguesa. A ideia básica é utilizar o termos «indutivo», «indução» em tudo o que diz respeito principalmente a métodos *demonstrativos* e «recorrente», «recorrência» quando se trata de métodos *definicionais* de funções numéricas. A distinção entre indução e recorrência (ou recursão) foi esclarecida por R. Dedekind em 1888, no importante trabalho *Was sind und was sollen die Zahlen?*, parte II do livrinho (trad. inglesa) *Essays on the Theory of Numbers (I. Continuity and Irrational Numbers; II. The Nature and Meaning of Numbers)*, Dover, 1963; tradução mais recente em W. Ewald, *From Kant to Hilbert, A Source Book in the Foundations of Mathematics*, Vol. II, Clarendon Press, Oxford, 1996, pp. 790-833. Mas a confusão terminológica permanece em alguns cantos do mundo.

[9]Na versão mais moderna da teoria dos ordinais (Von Neumann), ω é também o conjunto dos ordinais finitos, que são exactamente os números naturais (inteiros não negativos: 0, 1, 2, ...). Nesta teoria, cada ordinal é precisamente o conjunto dos ordinais mais pequenos, e a relação de precedência entre eles é a relação de pertença: $0 \in 1 \in 2 \in 3 \in \ldots$.

[10]«Admitimos que toda a função é equivalente, para todos os valores, a uma função predicativa do mesmo argumento.» É necessário esclarecer aqui que o termo «função» se refere aqui a «função proposicional» (fórmula ou condição em certas variáveis), na terminologia russeliana, e não a função numérica, como aliás o autor tenta explicar de seguida.

[11]Ao que parece, Poincaré tem razão parcial em que não se pode obter na teoria ramificada dos tipos a indução plena sem o axioma de redutibilidade, ao contrário do que pensou Russell (e tentou, sem êxito, no Apêndice B da segunda edição dos *Principia Mathematica* de Russell e Whitehead, Vol. I, pp. 650-8).

Mais precisamente, e mesmo admitindo o Axioma do Infinito, é impossível definir na teoria ramificada sem o axioma da redutibilidade a classe dos números naturais de tal maneira que sejam demonstráveis os axiomas de (Dedekind-)Peano e, em particular, todas as particularizações do axioma-esquema de indução. Ver o artigo de John Myhill, "The Undefinability of the Set of Natural Numbers in the Ramified *Principia*", em G. Nakhnikian (editor), *Bertrand Russell's Philosophy*, Duckworth, 1974. (Comunicação particular de Robert Black.) Uma boa descrição dos sistemas de tipos lógicos, e sua comparação com outros sistemas (Frege, Zermelo) pode encontrar-se em W.S. Harcher, *The Logical Foundations of Mathematics,* Pergamon Press, 1982. Ver também o artigo de A. Urquhart "The Theory of Types" em N. Griffin (editor), *The Cambridge Companion to Bertrand Russell,* Cambridge U.P. 2003, pp. 286-309.

[12]Referência ao famoso Postulado de Paralelismo (o V e último, na sua lista de postulados para a geometria), que muitos tentaram em vão ao longo dos séculos demonstrar a partir dos restantes. No séc. XIX provou-se ser impossível fazê-lo.

[13]Untersuchungen über dir Grundlagen der Mengelehre I, *Math Ann.* 65 (1908), pp. 199-215; Investigations in the Foundations of Set Theory I, trad. ingl. por Stefan Bauer-Mengelberg em Van Heijenoort (editor) *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic (1879-1931),* Harvard U. P., 1967, pp. 199-215; Investigações sobre os fundamentos da teoria dos conjuntos, trad. port. por Artur Vaz Ferreira, *Gazeta de Matemática* (1967), pp. 105-108.

[14]*Fundamentos da Geometria,* com Apêndices I-X do Autor e Suplementos de P. Bernays, F. Enriques e H. Poincaré, segunda edição portuguesa traduzida por Maria Pilar Ribeiro (colab. de J. da Silva Paulo), Paulino Lima Fortes e A.J. Franco de Oliveira (colab. de A. Vaz Ferreira), Revisão científica e coordenação por A. J. Franco de Oliveira, Gradiva, 2003.

[15]Hilbert fez, assim, uma prova de *consistência relativa*. Foi pelo mesmo método que se provou, nos anos 70 do séc. XIX, a consistência da geometria não-euclidiana de Bolyai e Lobatchewski relativamente à geometria euclidiana.

[16]«Por "conjunto" [*Menge*] devemos entender qualquer colecção num todo [*Zusammenfassung zu einem Ganzen*] M de objectos definidos e distintos m da nossa intuição ou pensamento.», em *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers* (1895, 1897), trad. e prefácio de P. E. B. Jourdain, Dover, 1955, p. 85. Ver também do mesmo autor: *Foundations of a General Theory of Manifolds: a Mathematical-Philosophical Investigation into the Theory of The Infinite* (1883), em W. B. Ewald (editor) *From Kant to Hilbert, A Source Book in the Foundations of Mathematics*, 2 vols., Oxford U.P., 1996, Vol. II, pp. 878-920.

[17]Nas notações do autor: (a) e (a, b), respectivamente. O *conjunto vazio* (*Nullmenge*) designa-se por $\emptyset$. Reserva-se (a, b) para o *par ordenado* de a e b.

[18]O autor quererá dizer uma «condição em (função proposicional de) x», pois é isso que é escrito por Zermelo que, alías, a designa por $\mathfrak{E}(x)$.

[19]A notação moderna para ST é $\bigcup$T, chamado *a união de* T (ou *união dos membros* de T).

[20]A notação moderna para UT é $\mathcal{P}$T ou $\mathcal{P}(\mathrm{T})$, chamado o *conjunto das partes de* T.

[21]$\mathrm{ST} = \bigcup \mathrm{T} = \bigcup\{\mathrm{A, B, C}\} = \{a, a', b, b', c, c'\}$.

[22]M conterá então a, $\{a\}$, $\{\{a\}\}$, $\{\{\{a\}\}\}$, etc.

[23]«Uma questão ou enunciado E diz-se *definit* se as relações fundamentais do domínio, mediante os axiomas e as leis universalmente válidas da lógica, determinam de uma maneira não arbitrária se ela é ou não satisfeita.»

[24]O significado desta palavra nunca ficou definitivamente esclarecido ou estabelecido a consenso generalizado. Todavia, após a adopção, sugerida por Skolem, nos anos 20, de uma linguagem formal de 1ª ordem para a teoria axiomática dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZF), o seu significado estabilizou como sinónimo de «propriedade de 1ª ordem». A ligação à predicatividade é nula, pois ZF é altamente impredicativa.

[25]Referência à famosa demonstração de Cantor (pelo chamado *método de diagonalização*) de que o cardinal do conjunto dos números reais (ou dos pontos de uma recta euclidiana) é maior do que o cardinal do conjunto dos números naturais (ou dos números inteiros, ou até dos números racionais).

25-10-2007