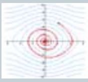
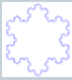
CAOS e FRACTAIS NATUREZA e ARTE






Ciência e Arte, 19/04/2011
Isabel Serra

CAOS E FRACTAIS

MATEMÁTICA e COMPUTADORES

Equações diferenciais e Geometria

NATUREZA e ARTE

A geometria fractal é a geometria da natureza (Mandelbrot)

ESTRUTURA FRACTAL DE UM FETO

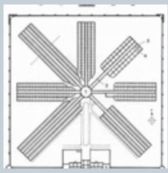
Arte e fractais

https://www.fractalus.com/sylvie/

A ORIGEM DO ESTUDO DOS FRACTAIS E DO CAOS

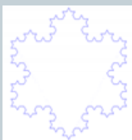
Os fractais podem ser encontrados na natureza, em estruturas vegetais ou animais (cristais, nuvens, sistemas radiculares, etc.) ou podem ser produzidos artificialmente através de um algoritmo matemático; repetem-se à exaustão e parecem sempre diferentes. A geometria fractal sempre produziu formas e desenhos surpreendentes. Há até quem se dedique a criar desenhos fractais com um intuito meramente estético.

Sven Geier, por exemplo, não se saiu nada mal...
http://obviousmag.org/archives/2007/08/fractais.html#ixzz1JmD6d3gW



A ideia dos fractais teve a sua origem no trabalho de alguns cientistas entre 1857 e 1913

Em 1872, Karl Weierstrass inventou uma função com propriedades “estranhas”.
Em 1904, von Koch, procurou uma definição mais geométrica de uma função semelhante, actualmente conhecida como floco de neve de Koch, que é o resultado de infinitas adições de triângulos ao perímetro de um triângulo inicial.

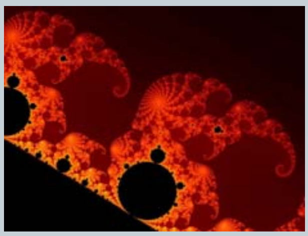


Floco de neve de Koch

Fractais são formas em que as partes são semelhantes ao todo.

Durante séculos a geometria euclidiana foi considerada como a única forma de descrever o mundo em que vivemos.

A descoberta de geometrias não-euclidianas introduziu novos objectos que representam certos fenómenos do Universo, por exemplo os fractais. Considera-se hoje que tais objectos retratam formas e fenómenos da Natureza.



O conjunto de Mandelbrot é um exemplo famoso de fractal.

O CAOS

A NOÇÃO DE CAOS, NA CIÊNCIA, TEM ORIGEM NO ESTUDO DA ESTABILIDADE DO SISTEMA SOLAR E na solução encontrada por Henri Poincaré

EPISÓDIOS
DA HISTÓRIA DO CAOS

Poincaré (1854-1912) e o problema dos três corpos

Edward Lorenz e a simulação da convexão na atmosfera

David Ruelle e os atractores estranhos

James Yorque e o nome "caos"

Benoit Mandelbrot e a geometria fractal

A "explosão" dos fenómenos caóticos

**Poincaré
e o problema dos três corpos**

O estudo do caos em sistemas dinâmicos começa com o movimento planetário e com Poincaré

Marie Curie e Poincaré, em 1911, na Conferência Solvay.

O TRABALHO DE POINCARÉ NA MECÂNICA CELESTE

Em 1887, no seu 60° aniversário, Oscar II, Rei da Suécia patrocinou uma competição matemática:

resolução do problema da estabilidade do sistema solar

(um caso particular do problema dos três corpos)

Poincaré ganhou o prémio por ter provado que a solução completa do problema a três corpos não pode ser determinada.

O SIGNIFICADO
DO RESULTADO DE POINCARÉ

Um dos membros do júri foi Karl Weierstrass, que considerou que:
"embora o trabalho de Poincaré não desse a solução do problema, o seu resultado inaugura uma nova era na mecânica celeste"

Tinha nascido uma nova disciplina – o caos

POINCARÉ A MECÂNICA CELESTE
E O CAOS

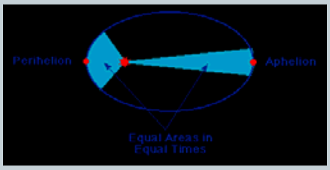
A solução de Poincaré mostrou que a evolução do sistema solar é caótica, como se diz actualmente.

Ou seja
pequenas perturbações no seu estado inicial, tais como um ligeira mudança na posição inicial do corpo, conduzem a uma mudança radical no seu estado final

O MOVIMENTO PLANETÁRIO,
O PROBLEMA A DOIS CORPOS E O DETERMINISMO

O campo gravítico produzido pelo Sol é de tal forma dominante que foi possível estabelecer a solução do problema de 2 corpos (P2C) Sol / planeta: as elipses de Kepler.

As equações do movimento que se obtém a partir das leis de Newton permitem obter a mesma solução



UM PROBLEMA A MAIS QUE DOIS CORPOS
NÃO TEM SOLUÇÃO MATEMÁTICA EXACTA

Desenvolveram-se então métodos perturbativos e obtiveram-se soluções aproximadas, para intervalos de tempo limitados, o que não permitia uma demonstração rigorosa da estabilidade do sistema solar.

Foi este problema em aberto que motivou os trabalhos de Henri Poincaré (1854 - 1912) que levaram à descoberta do caos.

Um problema relacionado, que também passou pelas mãos de Newton e Laplace, e que, apesar de constantes desenvolvimentos, ainda hoje dá trabalho a matemáticos e a computadores de ponta é o problema da órbita da Lua.

POINCARÉ O PROBLEMA DOS TRÊS CORPOS E O CAOS

Poincaré descobriu que um problema tão simples como o PR3C exibe soluções caóticas:

Órbitas com dependência sensível nas condições iniciais.

Em vez da abordagem tradicional da época Poincaré procura caracterizar de uma maneira geral **o comportamento qualitativo** das soluções de uma equação diferencial e, para isso, leva a descrição dessas soluções para o espaço de fase.

POINCARÉ O PROBLEMA DOS TRÊS CORPOS E O CAOS

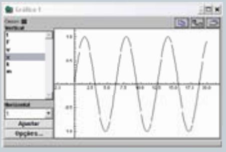
Em vez de procurar seguir o movimento ao longo do tempo (o que conduzia a equações impossíveis de resolver), apercebeu-se que podia encontrar órbitas periódicas considerando apenas os pontos de intercepção dessas órbitas com uma secção do espaço de fase

Se uma dada órbita passa por um ponto quando intercepta a secção, **será que no futuro voltará a passar pelo mesmo ponto?** Se a resposta for afirmativa, então a órbita é periódica.

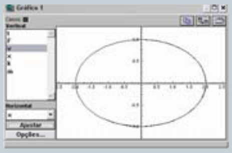
O oscilador harmónico
(pêndulo)
Um modelo

Oscilador harmónico no espaço de fase

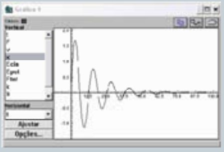
oscilador harmónico sem amortecimento



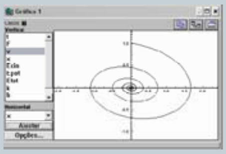
$$\frac{dv}{dt} = \frac{-kx}{m}$$
$$\frac{dx}{dt} = v$$



oscilador harmónico com amortecimento

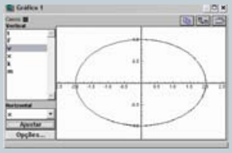


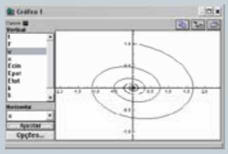
$$\frac{dv}{dt} = \frac{-kx - bv}{m}$$
$$\frac{dx}{dt} = v$$

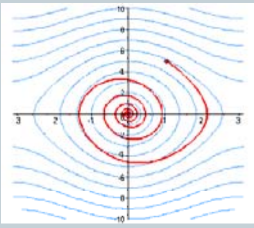


VISUALIZAR A EVOLUÇÃO DE UM SISTEMA DINÂMICO NO ESPAÇO DE FASE

Uma das vantagens de pensar em estados como pontos é a de permitir visualizar a evolução de um sistema.
Se um sistema tem um comportamento periódico regressa ao mesmo ponto DO ESPAÇO DE FASE periodicamente

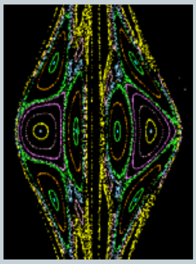






Enquanto para o pêndulo simples se têm órbitas fechadas (periódicas), para o pêndulo com amortecimento qualquer órbita tende para o ponto (*0*,*0*), onde o pêndulo fica parado.

Os padrões de comportamentos de certos sistemas físicos no espaço de fases, criam figuras com uma certa regularidade e simetria.

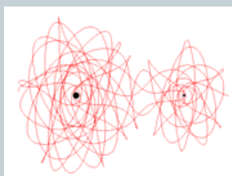


No sistema Júpiter-Sol-Terra
Para várias condições iniciais, representadas por diferentes cores, tem-se comportamento regular ou caótico

Foram essas órbitas no espaço das fases que permitiram caracterizar a "regularidade do caos" e criar uma nova geometria (geometria fractal) e novos conceitos (atractor)

No caso do problema a três corpos Poincaré descobriu órbitas irregulares

Duas órbitas com condições iniciais ligeiramente diferentes podiam afastar-se rapidamente uma da outra desenhando formas extraordinariamente complexas sem nunca passarem pelo mesmo ponto



EDWARD LORENZ
E O ESTUDO
DA CONVEXÃO
NA ATMOSFERA

Muitos anos depois…

Em 1963, setenta e tal anos depois de Poincaré ter descoberto o que se hoje se chama caos…

ele é reencontrado pelo matemático e meteorologista Edward Lorenz

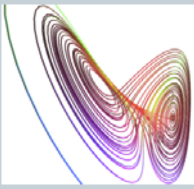
Edward Lorenz e o estudo da convexão atmosférica

Ao calcular soluções aproximadas para um sistema de equações que modela a convexão na atmosfera, reencontrou a dependência das condições iniciais (tal como Poincaré para o sistema a três corpos)

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$
$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y$$
$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

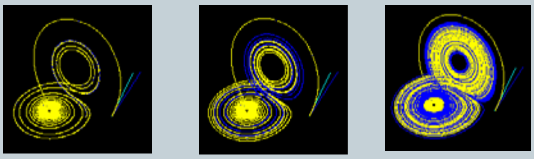
O EFEITO BORBOLETA

Este fenómeno, o da dependência sensível nas condições iniciais , deu origem à metáfora do efeito borboleta. A partir dos seus cálculos, Lorenz desenhou o primeiro esboço do atractor caótico que hoje é conhecido com o seu nome



Atractor de Lorenz

O atractor de Lorenz



Estas figuras — feita usando ρ=28, σ = 10 and β = 8/3 — mostram a evolução 3-D no atractor de Lorenz de duas trajectórias (uma a azul, a outra a amarelo), começando em dois pontos iniciais que diferem apenas de 10^{-5} na coordenada x. Inicialmente, as duas trajectórias parecem coincidir (só se vendo a amarela, por estar desenhada sobre a azul) mas, ao fim de algum tempo, a divergência é óbvia.

"Os resultados de Lorenz eram conhecidos dos meteorologistas mas só foram apreciados pelos físicos tardiamente" (David Ruelle)

O DESENVOLVIMENTO DA TEORIA DO CAOS

Stephen Smale, a topologia e os sistemas dinâmicos (1967)

David Ruelle, Smale e a turbulência nos fluídos (1971)

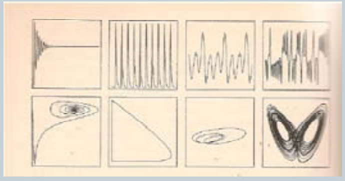
James Yorke, Lorenz e Smale
O artigo "Período três implica caos"
(Amer. Math. Monthly, 1975)

Yorke e Robert May: o caos
e a evolução de populações
(Nature, 1976)

Mandelbrot: a renovação de uma geometria já conhecida

Smale, tal como Poincaré, utilizou a intuição geométrica para estudar o movimento

Uma das suas primeiras contribuições foi elaborar uma nova maneira de conceber a complexidade dos sistemas dinâmicos usando topologia. Para traduzir as transformações no espaço de fases concebeu uma estrutura que se tornou conhecida por ferradura.



Imagens da evolução no tempo e no espaço de fases

A ferradura forneceu uma clara analogia visual da dependência em relação às condições iniciais

---

DAVID RUELLE, "O ACASO E O CAOS"

A turbulência é um dos fenómenos que "origina caos"

Em 1971 Ruelle e Taken tentam publicar um artigo sobre a turbulência mas é recusado

Segundo Ruelle e Taken, os escoamentos turbulentos são descritos por "atractores estranhos" do tipo do atractor de Lorenz

Ruelle aplicou a sua teoria a outros fenómenos tais como as reacções químicas

Muitos outros fenómenos são estudados na óptica do caos, a partir dos anos 1980

RUELLE- TAKEN
OS ATRACTORES ESTRANHOS

Os escoamentos turbulentos não são descritos pela sobreposição de numerosos modos mas por ATRACTORES ESTRANHOS.

Os atractores estranhos são fractais, ou seja, são definidos por linhas ou superfícies de dimensão não inteira.

O movimento sobre um atractor estranho apresenta o fenómeno de dependência sensível das condições iniciais

---

James Yorke

"Um matemático que gostava de se considerar um filósofo" (Gleick)

E ASSIM NASCEU O NOME "CAOS"

Admirador do trabalho de Lorenz, enviou a Smale uma cópia do seu artigo sobre a convexão na atmosfera. Ele achava que havia uma mensagem no trabalho de Lorenz que os físicos não queria ouvir.

Yorke analisou o comportamento de populações, a partir de dados fornecidos por um biólogo, Robert May, e concluíu sobre a existência de "bifurcações" caóticas, um fenómeno já detectado mas não considerado importante pelos biólogos.

A partir dos anos setenta a utilização de computadores para achar soluções aproximadas de equações foi-se generalizando

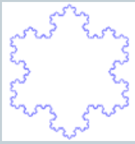
Muitos fenómenos são estudados na óptica do caos, a partir dos anos 1980:
sistema solar, meteorologia, evolução de populações, escoamento de fluidos, reacções químicas

desenvolveram-se novas ferramentas matemáticas que ajudaram a entender e a explicar estes sistemas.

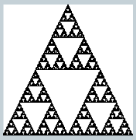
FRACTAIS, A OUTRA VIA DO ESTUDO DO CAOS

Mandelbrot e a via geométrica do caos

Mandelbrot, matemático (1924), Ao estudar a variação dos preços do algodão detectou um fenómeno:
A INVARIÂNCIA DE ESCALA
Que era já conhecido dos Matemáticos (curva de Koch, triângulo de Sierpinski, esponja de Menger)



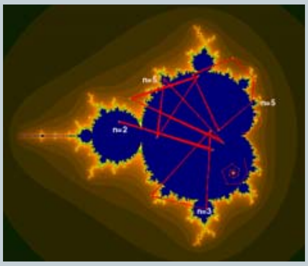
Ao estudar padrões irregulares com o auxílio do cálculo computacional, Mandelbrot chegou ao conceito de auto-semelhança que lhe serviu para definir o FRACTAL



Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, 1982

Conjunto de Mandelbrot

O conjunto de Mandelbrot foi definido pela primeira vez em 1905 pelo matemático Pierre Fatou, que obteve uma sequência de pontos (órbita) aplicando repetidamente a fórmula (no plano complexo) $z_{n+1} = z_n^2 + c$



Mandelbrot utilizou um computador para representar o conjunto

Na figura representa-se sobre o conjunto de Mandelbrot a evolução da sequência

$z_{n+1} = z_n^2 + c$

(para diferentes valores de c)

COMO FEZ A NATUREZA PARA ELABORAR UMA GEOMETRIA TÃO COMPLEXA?

Na opinião de Mandelbrot as complicações só existem na geometria euclideana . Pelo contrário, nos fractais, as estruturas ramificadas podem ser descritas com grande simplicidade, usando apenas alguns bits de informação.

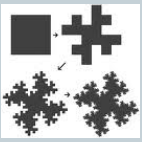
É possível que as transformações simples que deram origem às formas de Koch, Peano e Sierpinski tenham o seu análogo nas instruções codificadas nos genes de um organismo. Decerto o ADN não pode especificar o número de ramos de uma árvore mas pode especificar um processo repetitivo de bifurcação e desenvolvimento.

O “NASCIMENTO” DA GEOMETRIA FRACTAL

Muito antes de Mandelbrot os matemáticos interessavam-se já por formas geométricas com a propriedade da auto-similaridade

Conjunto de Cantor; Curva de Peano; Curva de Hilbert; Curva de Koch; triângulo e tapete de Sierpinski; Conjuntos de Fatou e Julia.

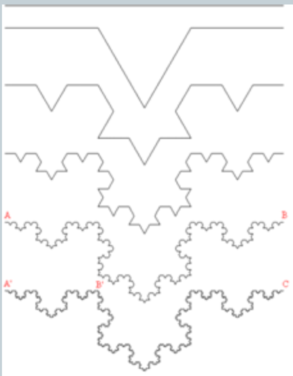
George Cantor (1845-1918)
Giuseppe Peano (1858-1932)
David Hilbert (1862-1943)
Helge Von Koch (1870-1924)
Pierre Fatou (1878- 1929)
Waclaw Siepirnski (1882-1969)
Gaston Julia (1893-1978)



Os fractais foram originalmente estudados como objectos matemáticos. A geometria fractal descreve muitas situações que não podem ser explicadas facilmente pela geometria clássica. É usada em ciência, tecnologia e arte gerada por computador.

A **curva de Koch**

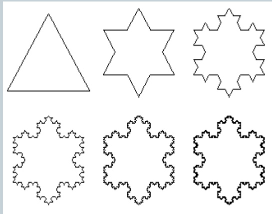
é uma curva geométrica e um dos primeiros fractais a serem descritos. Aparece pela primeira vez num artigo de 1906, intitulado "Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes", de autoria do matemático sueco



O mais conhecido **Floco de neve de Koch** (ou **estrela de Koch**) correponde à mesma curva, tirando que se inicia a sua construção a partir de um triângulo equilátero

O FLOCO DE NEVE DE KOCH

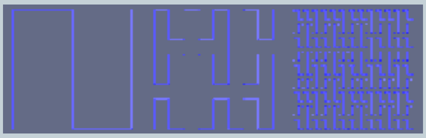
É um fractal, que se obtém partindo de um triângulo equilátero. Para o construir, começa-se com um triângulo. Ao meio de cada lado, adiciona-se um novo triângulo com um terço do tamanho. E assim por diante, como se pode verificar na figura seguinte. O comprimento total do contorno é 3*4/3*4/3*4/3... - infinito.



Eric Haines desenvolveu o mesmo conceito, a três dimensões, o que resultou num fractal com volume de um floco de neve.

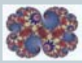
FRACTAIS

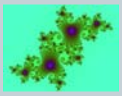
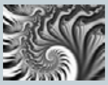
Curva de Peano-Hilbert

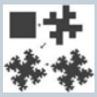


Esponja de Menger

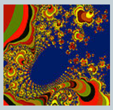
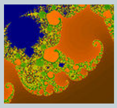
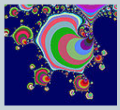
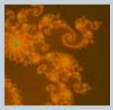




Alguns detalhes do conjunto de Mandelbrot
feitos com base num applet de JAVA

Arte e o Conjunto de Mandelbrot
O conjunto de Mandelbrot tem sido usado como fonte de figuras interessantes em arte. Algumas têm mesmo colecções de figuras, e as respectivas cordenadas utilizadas para as gerar.

http://pt.wikipedia.org/wiki/Conjunto_de_Mandelbrot

ALGUMA BIBLIOGRAFIA

James Geick, *Caos, a construção de uma nova ciência*, Gardiva, 1989

David Ruelle, *O Acaso e o Caos*, Relógio d'Água, 1994

Benoît Mandelbrot, *Objectos Fractais*, Gradiva, 1998

http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/