CIÊNCIA E ARTE – 16/3/2011

A SIMETRIA ABSOLUTA NÃO EXISTE NA NATUREZA.

A SIMETRIA É SEMPRE UMA APROXIMAÇÃO

Uma das primeiras coisas que notamos a respeito de simetrias é que elas podem ser de diferentes tipos.

Simetria bilateral

Quando pensamos em simetria começamos por pensar na simetria bilateral, por exemplo, as duas metades do corpo, as duas metades de uma casa, ou de um pórtico

Esta simetria é muito utilizada em arquitectura

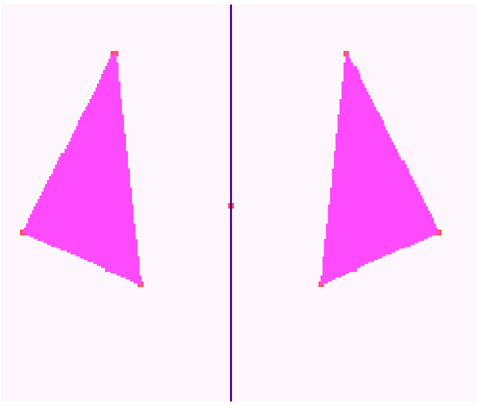
Simetrias Axiais

Simetrias axiais ou em relação a rectas são aquelas onde pontos, objectos ou partes de objectos são a imagem espelhada um do outro em relação à recta dada, chamada eixo de simetria.

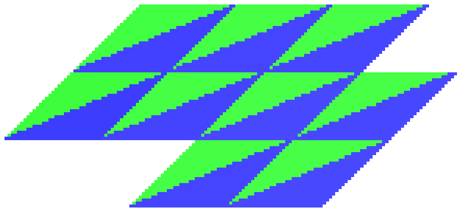
http://www.scienceu.com/geometry/articles/tiling/symmetry/p1.html

Exemplos de simetria

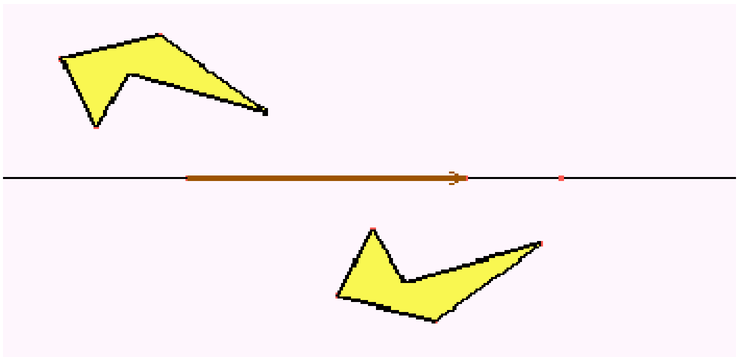
Simetria por reflexão



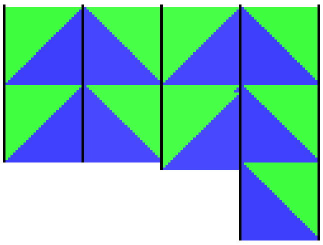
simetria por translacção



reflexão deslizante é uma reflexão seguida de translação



Simetria obtida por translacção e reflexão



Composições onde se podem identificar translações e rotações

Alhambra

Escher (Escher inspirou-se na ornamentação do palácio de Alhambra)

SIMETRIA E GRUPOS

(<u>Grupo</u>: conjunto A com uma operação associativa, com elemento neutro e em que cada elemento tem inverso)

Como usar esta noção de grupo à simetria?

Pensemos na simetria obtida por rotação:

Como obter elemento neutro e inverso?

Na matemática estuda-se a simetria de um dado objecto, fazendo-se o levantamento de todas as operações que não modificam o objecto (restituindo-o à sua identidade). Ao conjunto destas operações dá-se o nome de grupo. Se o objecto for geométrico, é um grupo de simetrias. Se for um objecto algébrico, designa-se por automorfismo de grupo

SIMETRIA NA ÁLGEBRA

É sobre isso que se debruça a teoria de Galois, ao tratar das simetrias de corpo.

Um exemplo de uma expressão algébrica onde está presente simetria é a seguinte:

$a^2c + 3abc + b^2c$

Se a e b forem trocados, o valor da expressão mantém-se inalterado devido à propriedade comutativa da adição algébrica e à propriedade comutativa da multiplicação.

Quando a teoria matemática da simetria geométrica foi estabelecida concluiu-se que havia dezassete modos possíveis de obter simetrias no plano (mosaicos, tapetes), ou seja, dezassete grupos. Ora os dezassete tipos de simetrias encontram-se tanto nas decorações dos templos egípcios, como na ornamentação das paredes do mosteiro de Alhambra em Granada.

Foi por intuição ou por tentativa e erro que foram obtidos?

A partir de quando a simetria se tornou um conceito matemático?

Do ponto de vista da matemática o conceito foi elaborado não a partir da geometria, mas sim da álgebra, a partir das raízes das equações.

Propriedades de simetria das raízes de uma equação – Teoria de Galois

Évarist Gallois (1811 — 1832)

A idéia central da teoria de Galois é considerar que permutações (ou rearranjos) dessas raízes têm propriedades tais que *qualquer* equação algébrica satisfeita pelas raízes é *ainda satisfeita* depois destas raízes terem sido permutadas.

Um importante pré-requisito é restringir a equações algébricas cujos os coeficientes são números racionais.

Estas permutações juntas formam um grupo de permutação, também conhecido como grupo Galois de polinômios (em relação aos números racionais). Isto pode ser melhor elucidado pela utilização de um exemplo.

Primeiro exemplo — uma equação quadrática

Considere a equação quadrática

$$x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Pelo uso da equação quadrática, pode-se encontrar suas raízes:

$A = 2 + \sqrt{3}$, e
$B = 2 - \sqrt{3}$.

Exemplos de equações algébricas satisfeitas por A e B incluem

$A + B = 4$, e
$AB = 1$.

Obviamente em ambas dessas equações, se nós trocarmos o A pelo B, obteremos outras expressões verdadeiras. Por exemplo, a equação $A + B = 4$ torna-se simplesmente $B + A = 4$. Além disso, é verdade, mas muito menos óbvio, que isso é válido também para *cada* possível equação algébrica satisfeita por A e B. A prova requer a teoria dos polinômios simétricos

Conclui-se que os grupos de Galois do polinômio $x^2 - 4x + 1$ consistem das duas permutações: a permutação identidade, a qual deixa A e B inalterado, e a permutação de transposição, a qual alterna A e B. Como um grupo, ele é isomorfo ao grupo cíclico de ordem dois, representado por $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Pode-se ainda levantar a objeção que A e B são relacionados ainda a outra equação algébrica,

$A - B - 2\sqrt{3} = 0$,

a qual *não* é mais verdadeira quando A e B são trocados. Porém, esta equação não nos interessa, porque ela não possui coeficientes racionais; em particular, $\sqrt{3}$ não é racional.

Uma discussão similar aplica-se a qualquer polinômio quadrático $ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são números racionais.

- Se o polinômio tem somente uma raiz, por exemplo $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$, então o grupo de Galois é trivial; isto é, ele contém unicamente uma permutação idêntica.
- Se ele tem duas raízes *racionais*, por exemplo $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$, o grupo de Galois é novamente racional.
- Se ele tem duas raízes *irracionais* (incluindo o caso onde as raízes são complexas), então o grupo de Galois contém novamente duas permutações, justamente como no exemplo acima.

Segundo exemplo — um pouco mais elaborado

Considere o polinômio

$x^4 - 10\,x^2 + 1$,

que pode também ser escrito como

$$(x^2 - 5)^2 - 24.$$

Desejamos descrever o grupo de Galois desse polinômio, novamente em relação ao corpo dos números racionais. O polinômio tem quatro raízes:

$$A = \sqrt{2} + \sqrt{3},$$
$$B = \sqrt{2} - \sqrt{3},$$
$$C = -\sqrt{2} + \sqrt{3},$$
$$D = -\sqrt{2} - \sqrt{3}.$$

Haverá 24 possibilidades para permutar essas 4 raízes, mas nem todas essas permutaçôes são membros do grupo de Galois. Os membros dos grupos de Galois devem preservar qualquer equação algébrica com coeficiente racionais envolvendo A, B, C e D. Uma dessas equações é

$$A + D = 0.$$

Porem a permutação

$$(A, B, C, D) \rightarrow (A, B, D, C)$$

não é permitida, porque isso transforma a equação válida $A + D = 0$ na equação $A + C = 0$, a qual é inválida, visto que $A + C = 2\sqrt{3} \neq 0$.

Outra equação que as raízes da equação satisfazem é

$$(A + B)^2 = 4.$$

Esta excluirá outras permutações, tais como:

$$(A, B, C, D) \rightarrow (A, C, B, D).$$

Continuando nesse processo, descobrimos que as únicas permutações remanescentes (satisfazendo ambas equações simultâneas) são:

$$(A, B, C, D) \rightarrow (A, B, C, D)$$
$$(A, B, C, D) \rightarrow (C, D, A, B)$$
$$(A, B, C, D) \rightarrow (B, A, D, C)$$
$$(A, B, C, D) \rightarrow (D, C, B, A),$$

e o grupo de Galois é isomórfico ao grupo de Klein

Évarist Gallois (1811 — 1832)

A sua teoria só foi conhecida e valorizada mais tarde

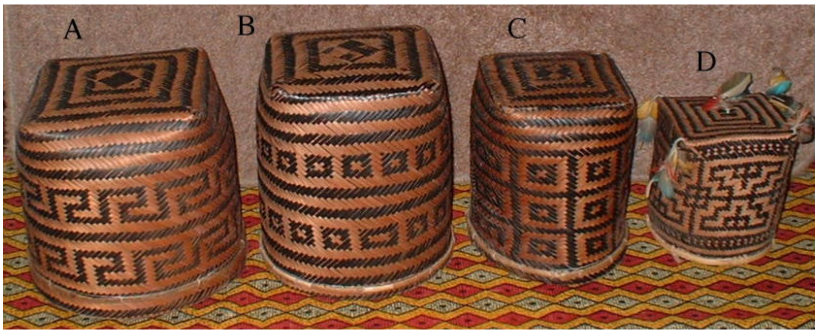
Só por volta de 1870 a sua ideia foi compreendida. Em 1872 Félix Klein propôs o seu "programa d'Erlangen"no qual ele explicava todas as teorias geométricas como dependentes de certas simetrias: **uma geometria é uma teoria das propriedades que permanecem invariantes para um certo grupo de operações, grupo no sentido de Galois.**

A SIMETRIA GEOMÉTRICA

(desde a Antiguidade)

Os gregos não se interessaram de forma explícita, em termos matemáticos, pela simetria. Mas, no entanto, tinham muito interesse por figuras que apresentam simetrias que se reproduzem a partir de certas transformações geométricas (rotações, translações). Certas figuras geométricas têm essa propriedade – o círculo, que é "invariante" para qualquer rotação no plano em torno do seu centro. O quadrado, o hexágono, etc., invariantes apenas para rotações de certos ângulos

<u>Tapetes, cestos, pavimentos</u>



Uma longa tradição do uso da simetria em padrões de tapeçaria encontra-se espalhada por várias culturas. Os índios Navajo da América usavam diagonais acentuadas e motivos rectangulares. Muitos tapetes orientais dispõem centros reflexos e contornos que se traduzem em padrões. Não é de admirar que muitos tapetes façam uso da simetria quadrilateral — um motivo simultaneamente reflectido pelos eixos vertical e horizontal.

Ao longo das épocas e dos tempos diferentes povos criaram uma infinidade de motivos artísticos com a finalidade de pavimentar o plano. Aliás, as pavimentações islâmicas são bastante conhecidas precisamente pela sua rara beleza e criatividade artística. A verdade é que existem, de facto, inúmeras formas de pavimentar o plano. Para tal basta apenas um pouco de arte e imaginação…

A Arte árabe, por exemplo, é repleta de simetrias, translações e padrões de repetição. Os árabes são os mais famosos criadores de mosaicos geométricos. Dado que a sua religião os impedia de desenhar pessoas e animais, a sua criatividade desenvolveu-se com os desenhos geométricos.

A pavimentação com mosaicos ou o desenho de tapetes contêm as simetrias descritas. Mas prendem-se também com outra questão:

Quantas maneiras há para preencher um plano?

Para preencher um plano com mosaicos de forma periódica podem usar-se quatro transformações geométricas:

1. Translacção (sem rotação)
2. Rotação
3. Reflexão
4. Reflexão deslizante (Reflexão seguida de translação)

Estas quatro transformações combinadas entre si dão origem a grupos de simetrias (estruturas algébricas), ou seja, as transformações definem grupos que obedecem a certas propriedades algébricas como soma, inversão, etc.

Uma composição com mosaicos é construída com mosaicos que sofrem transformações (rotações, translações, reflexões, relexões seguidas de translações)

Em 1891 Fedorov demonstrou que há apenas 17 estruturas básicas para as decorações possíveis do plano (e que são em número infinito) que formam mosaicos periódicos. São os grupos cristalográficos planos que são representados por notações.

Não é de admirar que tenham sido sobretudo cristalógrafos, a desenvolverque tenham desenvolvido esforços no sentido de sistematizar os vários tipos de pavimentações.

Em 1891 E. S. Fedorov na Rússia ao desenvolver estudos de Cristalografia, estabeleceu a primeira prova rigorosa da existência de grupos de simetria dos cristais no espaço tridimensional, num total de 230. E a partir dos grupos de simetria no espaço, Fedorov demonstrou a existência de 17 grupos de simetria periódicos no plano.

Evgraf Stepanovich Fedorov (1853 —1919) foi um cristalografista e mineralogista russo

Obteve paralelamente e de forma metodicamente independente de Arthur Moritz Schönflies os 230 grupos espaciais cristalográficos.

Os grupos de Fedorov

4 grupos de simetria sem rotações

5 grupos de simetria com rotações de 180 graus

3 grupos de simetria com rotações de 120 graus

3 grupos de simetria com rotações de 90 graus

2 grupos de simetria com rotações de 60 graus

Os dezassete grupos de simetria (Grupos bidimensionais de simetria)

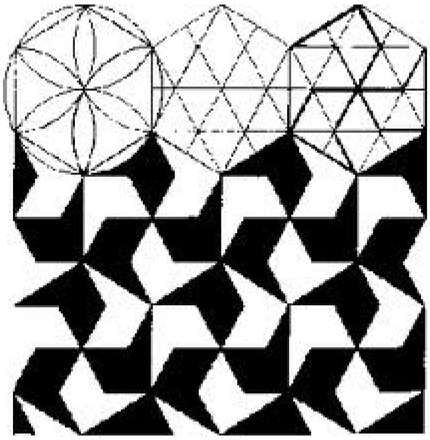
http://www.tele.ed.nom.br/ag/py16t.html

http://www.atractor.pt/mat/orbifolds/applets/pagsApplets/pagsApplets-p/pp.html

lista completa dos grupos:

p1: Dos traslaciones
p2: Tres simetrías centrales (o giros de 180º)
p3: Dos giros de 120º
p4: Una simetría central (o giro de 180º) y un giro de 90º
p6: Una simetría central y un giro de 120º
pm: Dos simetrías axiales y una traslación
pmm: Cuatro simetrías axiales en los lados de un rectángulo (p.e. 2 horizontales y 2 verticales)
pmg: Una simetría axial y dos simetrías centrales
cmm: Dos simetrías axiales perpendiculares y una simetría central

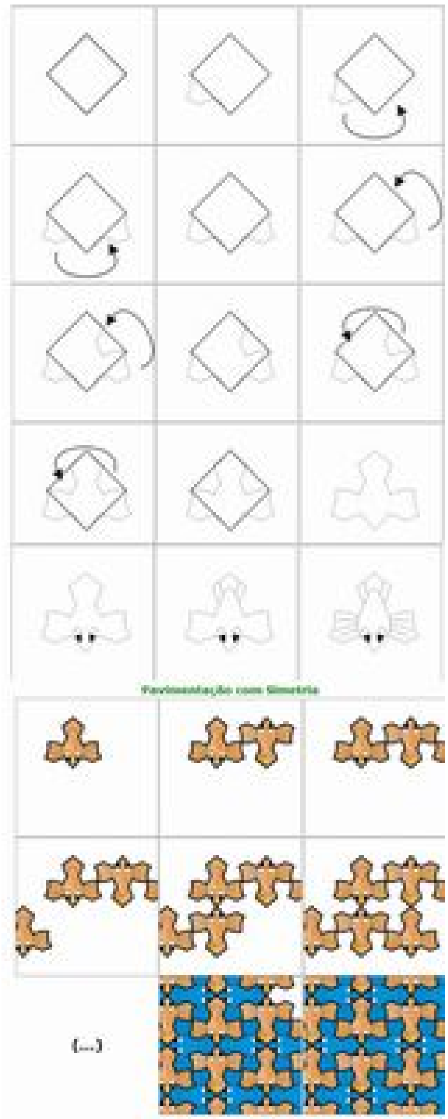
p31m: Una simetría axial y un giro de 120º
p3m1: Tres simetrías axiales en los lados de un triángulo equilátero (ángulos 60-60-60)
p4g: Una simetría axial y un giro de 90º
p4m: Tres simetrías axiales en los lados de un triángulo de ángulos 45-45-90
p6m: Tres simetrías axiales en los lados de un triángulo de ángulos 30-60-90
cm: Una simetría axial y una simetría con deslizamiento perpendicular
pg: Dos simetrías con deslizamiento paralelas
pgg: Dos simetrías con deslizamiento perpendiculares
Y no hay más. Lo dice el **Teorema de Fedorov de clasificación de grupos cristalográficos planos**

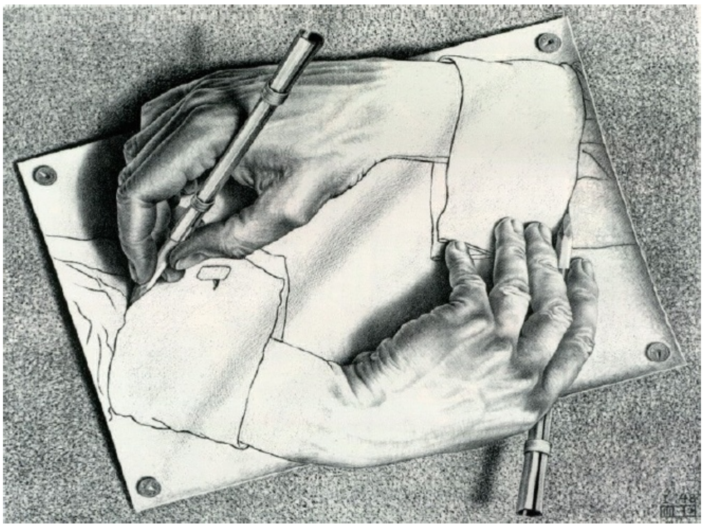
http://www.google.pt/images 

O CASO DE ESCHER

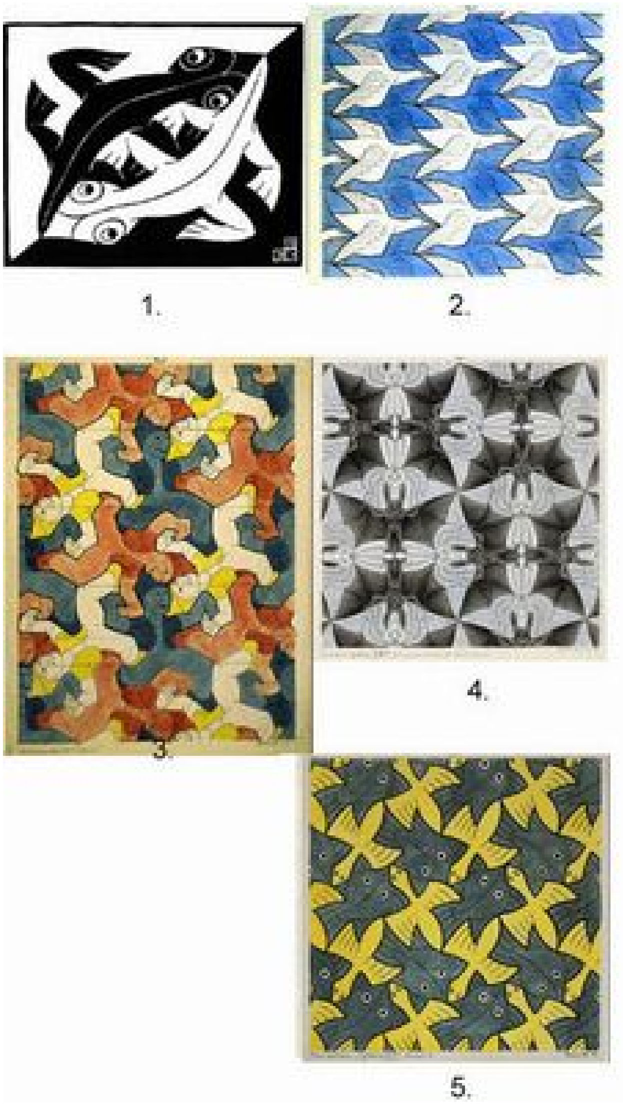
Escher é considerado o artista que mais êxito teve na conexão da Matemática com a Arte. Na sua obra existe um profundo conhecimento de geometria.

http://www.scribd.com/doc/36800242/do-Os-Trabalhos-de-Escher





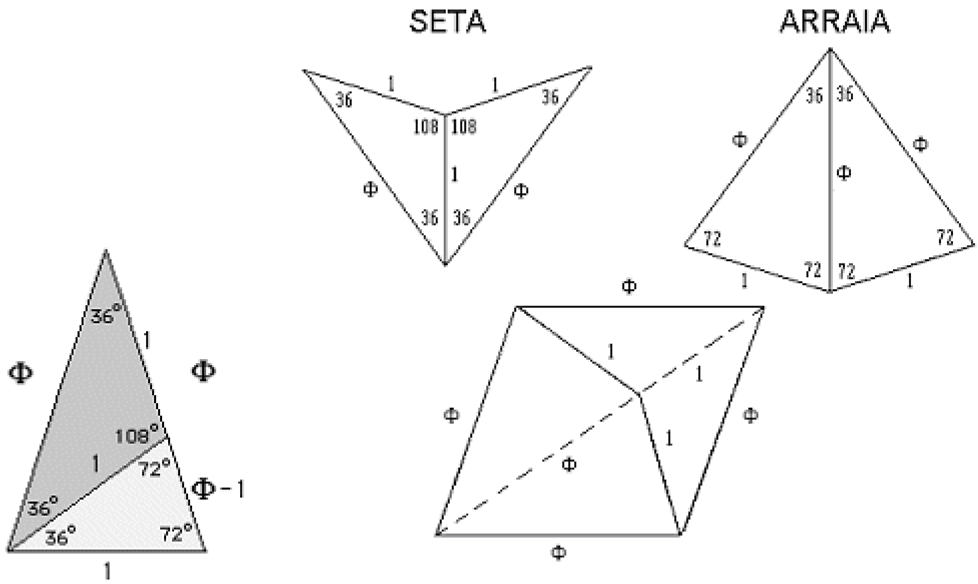
Construções impossíveis



Roger Penrose e os seus mosaicos

http://www.searadaciencia.ufc.br/donafifi/fibonacci/fibonacci7.htm

O físico inglês Roger Penrose inventou um tipo de mosaico de duas formas com características aparentemente contraditórias: tem simetria de ordem-5, preenche o plano e não é periódico. Os mosaicos de Penrose são formados a partir de um triângulo isósceles de lados iguais a Φ.



A **razão áurea** é definida algebricamente como:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \phi\,.$$

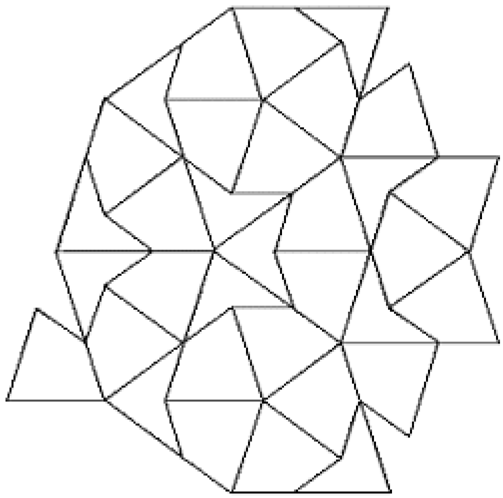
Número de ouro: $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$

A única solução positiva dessa equação quadrática é a seguinte:

$\emptyset = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$= 1,618033989…

Esse triângulo converte-se em dois, mostrados com cores diferentes na figura, dividindo-se um dos lados em uma parte que mede 1 e outra que mede Φ - 1. Combinando esses novos triângulos, Penrose montou dois tipos de mosaico, uma seta e uma arraia. Usando esses dois "mosaicos de Penrose" o plano pode ser preenchido.

Mais uma vez, não preciso nem dizer como esse mosaico está repleto de proporções áureas.



É surpreendente que, se dividimos o número de arraias pelo número de setas em uma dada área do mosaico de Penrose, essa fração tende para Φ quando a área examinada é cada vez maior.

Os mosaicos de Penrose cobrem uma superfície plana bi-dimensional, mas, os matemáticos já acharam pares de formas volumétricas que preenchem por completo o espaço tri-dimensional. São objetos que lembram cubos com faces repuxadas, todas idênticas aos mosaicos planos de Penrose. São chamados, por causa disso, de "romboedros áureos".

O que não se esperava, porém, é que a simetria de ordem-5, presente nos mosaicos de Penrose e nesses romboedros que enchem o espaço, pudesse surgir em objetos físicos reais, como sólidos. Mas, surgiu. Na década de 80 do século passado foram descobertos certos materiais que tinham simetria de ordem-5 e um arranjo não-periódico. Foram chamados de "quase-cristais", pois têm simetria de rotação, como os cristais normais, mas, não têm simetria de translação, isto é, não possuem uma "célula" que se repete periodicamente em alguma direção espacial.